Matematisk statistik för Z, del B

Tentamen 11 december 2000 (em, V-salarna)

Tillåtna hjälpmendel är läroboken Feldman & Valdez-Flores, räknedosa, Beta samt grundkursens formel- och tabellsamling.

För betyget 3 krävs 12 p, för 4:a 18 p och för 5:a 24 p av totalt 30 p.

Examinator är Tommy Norberg, och jour är Jonas Tekele, ankn 8295.

Uppgifter

1. Betrakta Markovkedjan med tillståndsrum $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ och transitionsmatris

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 0 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/10 & 3/10 & 3/5 & 0 \\ 1/10 & 0 & 1/5 & 3/5 & 1/10 \\ 1/10 & 0 & 0 & 0 & 9/10 \end{bmatrix}$$

Klassificera tillstånden. (3 p)

2. En tillverkningsprocess består av fyra steg: P_1, P_2, S och M. Råämnen ankommer från diverse leverantörer och förbereds i P_1-steget för sammansättningen som sker i S-steget. I M-steget målas den nu fungerande produkten. Innan den färdiga målade produkten skickas kontrolleras den. Statistik har visat att ca 20% av de färdiga produkterna måste plockas i sär, vilket i så fall sker i P_2-steget, och sättas samman igen i S-steget för att därefter målas på nytt, etc.

   (a) Ange tillståndsrum och rita tillståndsdiagram, samt (1 p)

   (b) ange transitionsmatris (1 p)

   för den Markovkedja som beskriver hur ämnen rör sig genom tillverkningsprocessen och ut ur den. Antag att tillverkningen av en färdig produkt drar kostnaden 20 kr i steg P_1, 40 kr i steg S, 20 kr i steg M och 40 kr i steg P_2 (kostnaden för kontroll ingår i kostnaden för målningen).

   (c) Bestäm den förväntade kostnaden per färdigtillverkad enhet. (3 p)

3. Låt $N \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$. Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara oberoende och fördelade som den stokastiska variabeln X. Bevisa att

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \lambda E[X]$$

gäller då N och sekvensen $X_1, X_2, \ldots$ är oberoende. (4 p)

(vänd)

4. Slå upp tabell C-6 på sidan 304 i Feldman & Valdez-Flores. På rad 23 i tabellen hittar du 8 st slumptal. Använd dessa i ordning från vänster till höger för att simulera en Markovprocess med tillståndsrum $E = \{A, B, C\}$ och generator

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

som startar i tillståndet A. (4 p)

5. Beräkna stationär fördelning för Markovprocessen i ovanstående uppgift. (3 p)

6. En populär samlingslokal kan kanske modelleras som en M/M/1/K-kö. Antag att lokalens maximala kapacitet är 250 st, att folk anländer med intensiteten 50 st/timma och att folk stannar i genomsnitt i 2 timmar. Antag jämnvikt. Ungefär hur många måste avvisas per timma p g a att lokalen är full? (3 p)

7. Betrakta ett nätverk av köer med noder kallade 1 och 2. Transitionsmatrisen som talar om hur de individuella jobben rör sig mellan noderna (på engelska "switching probability matrix") är

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

Jobb anländer utifrån till nod 1 med intensiteten $\gamma_1 = 10$ jobb/h. Nod 1 har en betjänare som klarar av att betjäna 125 jobb/h. Nod 2 har två betjänare som var och en klarar av att betjäna 12 jobb/h. Varje jobb kostar 220 kr/h medan de befinner sig i nätet. Antag att förutsättningarna för ett Jackson-nät är uppfyllda. Förutsätt att nätet är i jämnvikt (d v s att stationära förhållanden råder). Beräkna

   (a) förväntat totalt antal jobb i nätet, (2 p)

   (b) motsv totala snittkostnad, (1 p)

   (c) väntevärdet av tiden ett godtyckligt jobb är i nätet. (1 p)

8. Bevisa Littles sats för ett Jackson-nät. Satser e dyl i läroboken får självklart användas. (4 p)

Lycka till!