Lösningar till Matematisk statistik för Z, del B, den 11 dec 2000

1. Tillstånden 3 och 4 är transienta, ty dem kan kedjan lämna utan att någonsin återkomma. Tillståndet 2 är absorberande. Det bildar därför en egen irreducibel klass. Tillstånden 1 och 5 bildar också en irreducibel klass, ty väl där, så kommer kedjan att ständigt hoppa mellan dessa två tillstånd.

2. (a) Tillståndsrummet är $E = \{P_1, S, M, P_2, U\}$, där U betyder att den färdiga produkten är klar.

   (b) Transitionsmatris är

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   (c) Eftersom alla råämnen passerar P_1-steget exakt en gång, kan vi utesluta det ur kalkylen och räkna på resten. Matrisen av transitionssannolikheter mellan de transienta tillstånden S, M och P_2 blir då

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Det följer att

$$\mathbf{R} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{bmatrix} 1.25 & 1.25 & 0.25 \\ 0.25 & 1.25 & 0.25 \\ 1.25 & 1.25 & 1.25 \end{bmatrix}$$

   Översta raden i $\mathbf{R}$ ger förväntat antal gånger ett råämne besöker stegen S, M och P_2, givet att det startar i S. Därför kostar en enhet

$$20 + 1.25 \cdot 40 + 1.25 \cdot 20 + 0.25 \cdot 40 = 105$$

   kr att tillverka.

3. $E[\sum_{i=1}^{N} X_i] = \sum_n E[\sum_{i=1}^{n} X_i | N = n] P(N = n) = \sum_n \sum_{i=1}^{n} E[X_i | N = n] P(N = n) = \sum_n n E[X] P(N = n) = E[X] \sum_n n P(N = n) = \lambda E[X]$. I den tredje likheten utnyttjades oberoendet mellan N och X-sekvensen. Den första likheten är lagen om total sannolikhet uttryckt för väntevärden (se nämnaren i uttrycket för Bayes formel (sats 2.4.1 i Milton & Arnold).

4. Slumptalen som ska användas är: 0.2013, 0.9000, 0.3621, 0.8192, 0.2016, 0.4512, 0.3482, 0.1755. Tidpunkten då första transitionen sker är $t_1 = -(1/3) \ln 0.2013 = 0.534$, ty intensiteten för tillståndsändring är 3 då processen är i tillstånd A. Vidare gäller att

$$P\{\text{processen hoppar till } B | \text{processen hoppar från } A\} = 2/3$$

   och

$$P\{\text{processen hoppar till } C | \text{processen hoppar från } A\} = 1/3$$

   För att simulera vart processen hoppar använder vi nästa slumptal, vilket är 0.9000. Av $0.9000 > 2/3$ drar vi slutsatsen att processen hoppar till C. Tidpunkten för nästa transition är $t_2 = t_1 - (1/1) \ln 0.3621 = 0.534 + 1.016 = 1.550$, ty totala intensiteten för tillståndsändring är 1 då processen är i C. Från C kan processen bara hoppa till A, så vart processen hoppar behöver vi egentligen inte simulera. Jag hade emellertid på förhand bestämt att vartannat slumptal ska användas till att simulera nästa tillstånd, så tidpunkten för tredje tillståndsändringen ges i min simulering utav $t_3 = t_2 - (1/3)\ln 0.2016 = 2.084$ och eftersom nästa slumptal $0.4512 < 2/3$ är nästa tillstånd B. I B är intensiteten för tillståndsändring 5, så tidpunkten för nästa transition är därför $t_4 = t_3 - (1/5)\ln 0.3482 = 2.295$ och eftersom $0.1755 < 0.8$ så hoppar processen till A denna gång. I min simulering blev alltså tidpunkterna då processen bytte tillstånd lika med $0.534, 1.550, 2.084, 2.295$ och processen hoppade från till i tur och ordning C, A, B, A. Det är viktigt att varje gång processen är i t ex A använda samma regel då man bestämmer vart processen hoppar.

5. Stationär fördelning fås genom att ta den lösning till ekvationssystemet $\mathbf{pG} = 0$ som satisfierar $\mathbf{p1} = 1$ (obs att $\mathbf{p1} = p(A)+p(B)+p(C)$). Jag erhöll sannolikhetsvektorn $\mathbf{p} = [5 \quad 2 \quad 7]/14 = [5/14 \quad 1/7 \quad 1/2] = [0.357 \quad 0.143 \quad 0.5]$.

6. Enl formel (5.16) i Feldman & Valdez-Flores gäller att

$$p_K = \frac{\rho^K(1-\rho)}{1-\rho^{K+1}} = \frac{100^{250}(1-100)}{1-100^{251}} \approx \frac{100^{250}\cdot 99}{100^{251}} = 0.99$$

ty $\rho = 50/(1/2) = 100$ och $K = 250$. Lokalen är alltså full i 99% av tiden. Antalet avvisade per timma är därför ungefär $\lambda p_K = 49.5$ st.

7. Räkna först effektiva ankomstintensiteter λ_i till de båda noderna. Detta görs genom att lösa ekvationssystemet

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 10 + 0.8\lambda_1 + 0.5\lambda_2 \\ \lambda_2 &= 0.2\lambda_1 \end{aligned}$$

Jag fick $\lambda_1 = 100$ jobb/h och $\lambda_2 = 20$ jobb/h, vilket ger $\rho_1 = 100/125 = 4/5 = 0.8$ och $\rho_2 = 20/(2\cdot 12) = 5/6 = 0.833$. Enl formel (5.7) gäller $L_1 = \rho_1/(1-\rho_1) = 4$ och enl formel i övning 5.4 (sida 149) gäller att $L_2 = 2\rho_2/(1-\rho^2) = 60/11 = 5.455$. Detta ger

   (a) $L = L_1 + L_2 = 104/11 = 9.455$
   (b) snittkostnaden $(104/11)\cdot 220 = 2080$ kr
   (c) $W = L/\gamma_{\text{tot}} = (104/11)/10 = 104/110 = 0.945$ h, eller knappt 57 minuter.

8. Sats 5.4 på sida 138 i Feldman & Valdez-Flores säger att

$$E[T_{\text{net}}] = \textstyle\sum_i W_i \nu \mathbf{R}(i) = \sum_i W_i \sum_j \nu(j) R(j,i) = \sum_i \sum_j \gamma(j) R(j,i) W_i/\gamma_{\text{tot}}$$

Enl sats 5.2 är

$$\textstyle\sum_j \gamma(j) R(j,i) = \lambda_i$$

och därför gäller

$$E[T_{\text{net}}] = (1/\gamma_{\text{tot}}) \textstyle\sum_i \lambda_i W_i = (1/\gamma_{\text{tot}}) \sum_i L_i = L/\gamma_{\text{tot}}$$

Den mittersta likheten följer av Littles sats för M/M/c-köer.