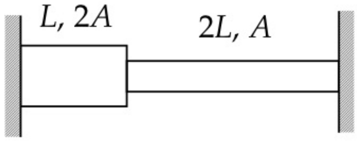
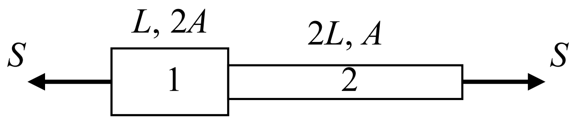



1. Två linjärt termoelastiska ($E$, $\alpha$), massiva cylindrar med mått enligt figuren är med exakt passning monterade mellan två stela, fixa väggar. Bestäm de reaktionskrafter som uppkommer vid väggarna då anordningen värms $\Delta T$. (5p)




Snitta och <u>jmv.</u> $\Rightarrow$ $S$ i varje del.

<u>Deformation</u>: $\delta_{tot} = \delta_1 + \delta_2$

<u>Material</u>: $\left[\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \cdot \Delta T \quad \Rightarrow \quad \delta = \varepsilon L = \frac{\sigma L}{E} + \alpha \cdot \Delta T \cdot L = \frac{SL}{EA} + \alpha \cdot \Delta T \cdot L\right]$

$$\because \quad \delta_1 = \frac{SL}{E \cdot 2A} + \alpha \cdot \Delta T \cdot L \quad \text{och} \quad \delta_2 = \frac{S \cdot 2L}{EA} + \alpha \cdot \Delta T \cdot 2L$$

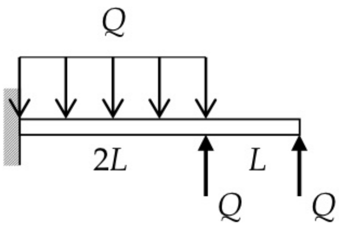
Här är $\delta_{tot} = 0 \Rightarrow$

$$\frac{SL}{E \cdot 2A} + \alpha \cdot \Delta T \cdot L + \frac{S \cdot 2L}{EA} + \alpha \cdot \Delta T \cdot 2L = 0$$

$$\frac{SL}{EA}\left(\frac{1}{2} + 2\right) = -3\alpha \cdot \Delta T \cdot L$$

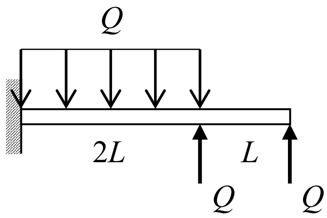
$$\Rightarrow \quad S = -\frac{6}{5}\alpha \cdot \Delta T \cdot EA$$

■

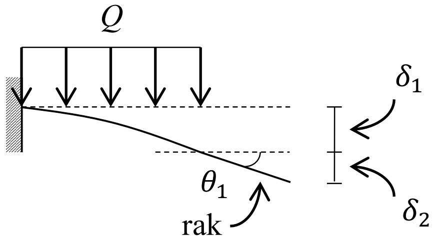



2. Balken enligt figuren (längd $3L$, böjstyvhet $EI$) är belastad med en utbredd last och två punktkrafter. Bestäm utböjningen av balkens högra ända.

(5p)



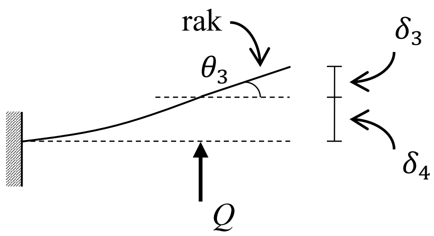

= (Elementarfall och superposition) =




$$\delta_1 = \frac{Q \cdot (2L)^4}{2L \cdot 8EI} = \frac{Q\,L^3}{EI}$$

$$\theta_1 = \frac{Q \cdot (2L)^3}{2L \cdot 6EI} = \frac{2Q\,L^2}{3EI}$$

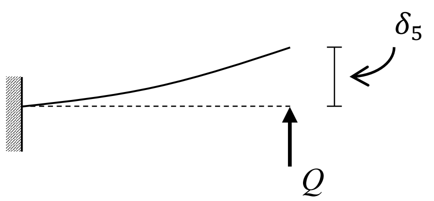
+




$$\delta_4 = \frac{Q \cdot (2L)^3}{3EI} = \frac{8Q\,L^3}{3EI}$$

$$\theta_3 = \frac{Q \cdot (2L)^2}{2EI} = \frac{2Q\,L^2}{EI}$$

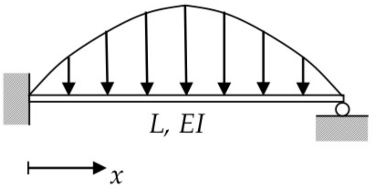
+




$$\delta_5 = \frac{Q \cdot (3L)^3}{3EI} = \frac{9Q\,L^3}{EI}$$

$$\delta_{tot}\,(\uparrow) = -\delta_1 - \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 = -\delta_1 - L\theta_1 + L\theta_3 + \delta_4 + \delta_5 =$$

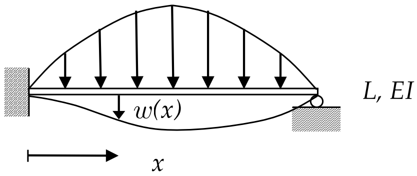
$$= \frac{QL^3}{EI}\left\{-1 - \frac{2}{3} + 2 + \frac{8}{3} + 9\right\} = \frac{36}{3}\frac{QL^3}{EI} = 12\,\frac{QL^3}{EI}$$

3. 


Bestäm utböjningen av balken i figuren här intill. Lasten har lastintensiteten

$$q(x) = \frac{Q}{L}\sin\frac{\pi x}{L}$$

(5p)




Här är $q(x) = \frac{Q}{L}\sin\frac{\pi x}{L}$ så ELDE blir:

$$EIw''''(x) = \frac{Q}{L}\sin\frac{\pi x}{L} \quad \Rightarrow$$
$$EIw'''(x) = -\frac{Q}{L}\frac{L}{\pi}\cos\frac{\pi x}{L} + C_1$$
$$EIw''(x) = -\frac{Q}{L}\left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \sin\frac{\pi x}{L} + C_1 x + C_2$$
$$EIw'(x) = \frac{Q}{L}\left(\frac{L}{\pi}\right)^3 \cos\frac{\pi x}{L} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$
$$EIw(x) = \frac{Q}{L}\left(\frac{L}{\pi}\right)^4 \sin\frac{\pi x}{L} + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

<u>RV1:</u> $w(0) = 0 \;\Rightarrow\; C_4 = 0$ (1)

<u>RV2:</u> $w'(0) = 0 \;\Rightarrow\; C_3 = -\frac{Q}{L}\left(\frac{L}{\pi}\right)^3$ (2)

<u>RV3:</u> $w(L) = 0 \;\Rightarrow\; C_1\frac{L^3}{6} + C_2\frac{L^2}{2} + C_3 L + C_4 = 0$ (3)

<u>RV4:</u> $M(L) = 0 \Rightarrow [\,M(x) = -EIw''(x)\,]: \; -C_1 L - C_2 = 0$ (4)

(4) $\Rightarrow\; C_2 = -C_1 L \;\Rightarrow$ i (3): $C_1\frac{L^3}{6} - C_1\frac{L^3}{2} - \frac{Q}{L}\left(\frac{L}{\pi}\right)^3 L = 0 \;\Rightarrow\; C_1 = -\frac{3}{\pi^3}Q \;\Rightarrow\; C_2 = \frac{3}{\pi^3}QL$

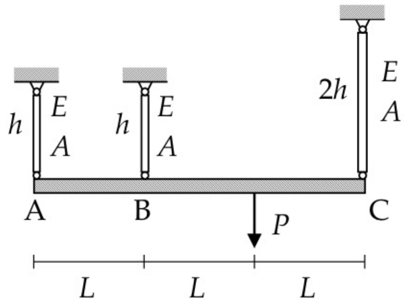
$$\because \quad w(x) = \frac{1}{EI}\left\{\frac{Q}{L}\left(\frac{L}{\pi}\right)^4 \sin\frac{\pi x}{L} - \frac{3}{\pi^3}Q\frac{x^3}{6} + \frac{3}{\pi^3}QL\frac{x^2}{2} - \frac{Q}{L}\left(\frac{L}{\pi}\right)^3 x\right\} =$$

$$= \frac{QL^3}{\pi^3 EI}\left\{\frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi x}{L} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \frac{3}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{x}{L}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad w\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{QL^3}{\pi^3 EI}\left\{\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right\} = \frac{QL^3}{\pi^3 EI}\left\{\frac{1}{\pi} - \frac{3}{16}\right\} \qquad [>0\ !]$$

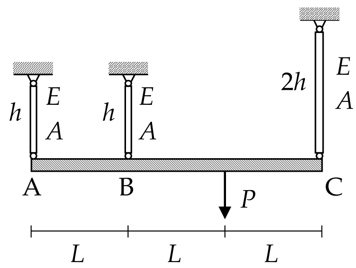
■

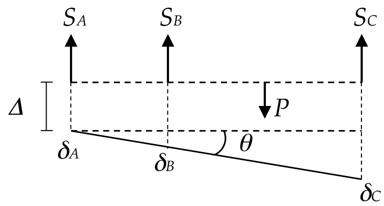
4.




En stel lätt bom AC av längden $3L$ är upphängd i horisontellt läge m.h.a. tre vertikala stänger fästa i A, B och C som figuren antyder. Stängerna är av ett linjärt elastiskt material (elasticitetsmodul $E$), och de har var och en tvärslittsarean $A$. Deras respektive längder ges i figuren.

Bestäm krafterna i stängerna om bommen belastas med en kraft $P$ som figuren visar. (5p)




Inför *den stela* bommens translation $\Delta$ och rotation $\theta$.

<u>Jämvikt:</u>

$$\uparrow: \quad S_A + S_B + S_D - P = 0 \qquad (1)$$

$$\overset{\curvearrowright}{A}: \quad -S_B \cdot L + P \cdot 2L - S_C \cdot 3L = 0 \qquad (2)$$

<u>Deformation:</u>

$$\delta_A = \Delta \qquad (3)$$

$$\delta_B = \Delta + L \cdot \theta \qquad (4)$$

$$\delta_C = \Delta + 3L \cdot \theta \qquad (5)$$

<u>Material:</u> $\delta_A = \dfrac{S_A h}{EA}$ (6) $\qquad \delta_B = \dfrac{S_B h}{EA}$ (7) $\qquad \delta_C = \dfrac{S_C 2h}{EA}$ (8)

(3) och (6) $\Rightarrow$ $S_A = \dfrac{EA}{h}\Delta$

(4) och (7) $\Rightarrow$ $S_B = \dfrac{EA}{h}(\Delta + L\theta)$

(5) och (8) $\Rightarrow$ $S_C = \dfrac{EA}{2h}(\Delta + 3L\theta)$ som insatt i (1) och (2) ger:

$$\begin{cases} \Delta + \Delta + L\theta + \dfrac{\Delta}{2} + \dfrac{3L\theta}{2} = \dfrac{Ph}{EA} \\ \Delta + L\theta + \dfrac{3}{2}(\Delta + 3L\theta) = 2\dfrac{Ph}{EA} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\Delta + 5L\theta = 2\dfrac{Ph}{EA} \\ 5\Delta + 11L\theta = 4\dfrac{Ph}{EA} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = \dfrac{Ph}{3LEA} \\ \Delta = \dfrac{Ph}{15EA} \end{cases}$$

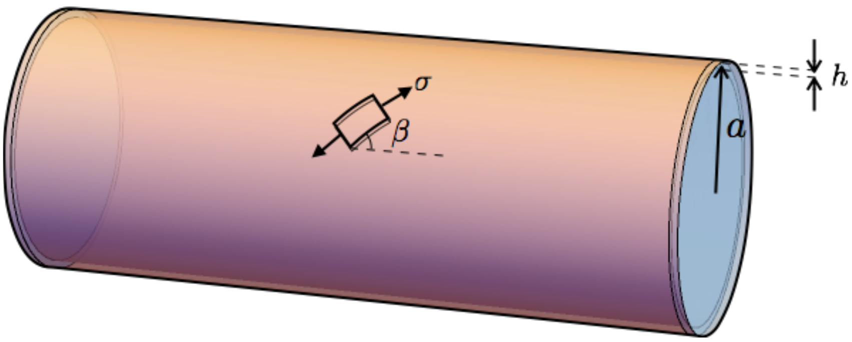
$$\because \quad S_A = \frac{P}{15} \qquad S_B = \frac{P}{15} + \frac{P}{3} = \frac{6P}{15} \qquad S_C = \frac{1}{2}\left(\frac{P}{15} + P\right) = \frac{8P}{15}$$

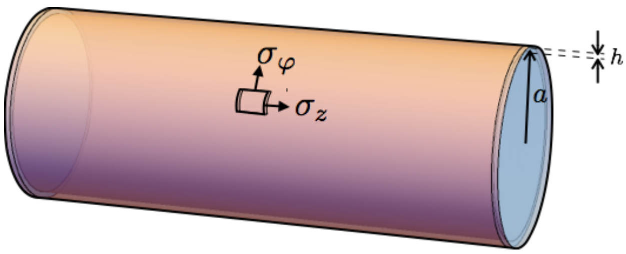
■

5. Ett tunnväggigt slutet tryckkärl med väggtjocklek $h$ och medelradie $a$ är tillverkat i ett material med elasticitetsmodul $E$ och poissontal $\nu$. Kärlet belastat med ett inre övertryck $p$. Man uppmäter normalspänningen $\sigma$ i riktningen $\beta$ mot en horisontell linje på rörets mantelyta. (Se figuren.)

Bestäm det inre övertrycket $p$ i tryckkärlet.

(5p)




Ångpanneformlerna ger

$$\sigma_z = \frac{pa}{2h}$$
$$\sigma_\varphi = \frac{pa}{h}$$
$$\sigma_r \approx 0 \quad (\tau_{z\varphi} = 0)$$

Enligt FS ges då normalspänningen i den riktning som anges av vinkeln $\beta$ av

$$\begin{aligned}\sigma &= \tfrac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_\varphi) + \tfrac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_\varphi)\cos 2\beta + \tau_{z\varphi}\sin 2\beta \\ &= \frac{pa}{h}\left(\tfrac{1}{2}(1 + \tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{2}(1 - \tfrac{1}{2})\cos 2\beta\right) \\ &= \frac{pa}{4h}(3 - \cos 2\beta)\end{aligned}$$

Alltså är det sökta övertrycket

$$p = \frac{4h\sigma}{a(3 - \cos 2\beta)}$$

■