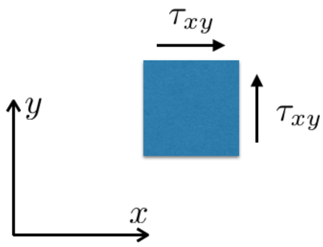
Lösningsskisser till

Tentamen i Hållfasthetslära för Z2 (TME017), 2015-06-01

1. På ytan av en kropp råder plant spänningstillstånd, och i en viss punkt verkar (enbart) skjuvspänningen $\tau_{xy} = 1.5\,\mathrm{MPa}$.
   a) Bestäm huvudspänningsriktningarna. (3p)
   b) Beräkna von Mises' effektivspänning i punkten. (2p)



a) Formelsamlingen (FS) avsnitt 8 ger oss flera sätt att lösa detta. Ett är att använda formlerna

$$\begin{cases} \sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm R \\ \sin(2\psi_1) = \dfrac{\tau_{xy}}{R} \\ \cos(2\psi_1) = \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2R} \end{cases}$$

där $\varphi = \psi_1$ är riktning till σ_1 och

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

med, i detta fall,

$$\sigma_x = \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 1.5\,\mathrm{MPa}$$

Det ger direkt att huvudspänningsriktningarna är vridna 45° jämfört med *x*- och *y*-riktningarna.

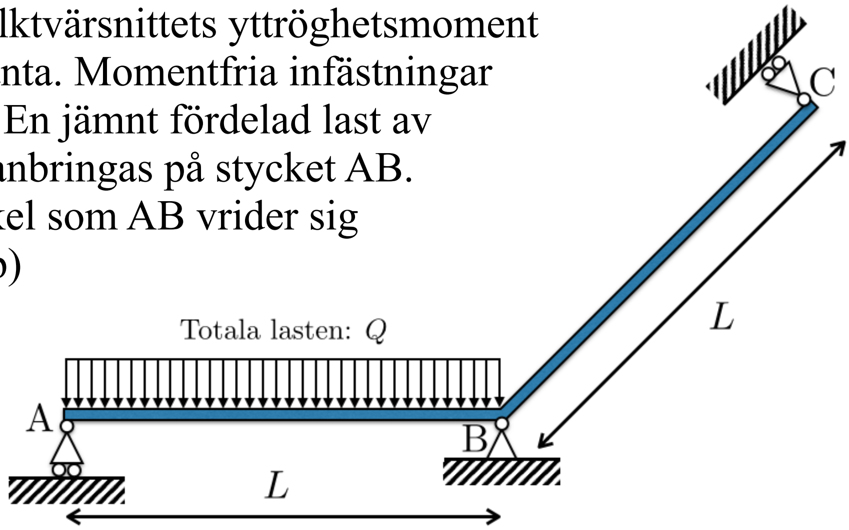
b) FS avsnitt 11 säger att

$$\sigma_{\mathrm{e}}^{\mathrm{vM}} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x + 3\tau_{xy}^2 + 3\tau_{yz}^2 + 3\tau_{zx}^2} = \\ = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

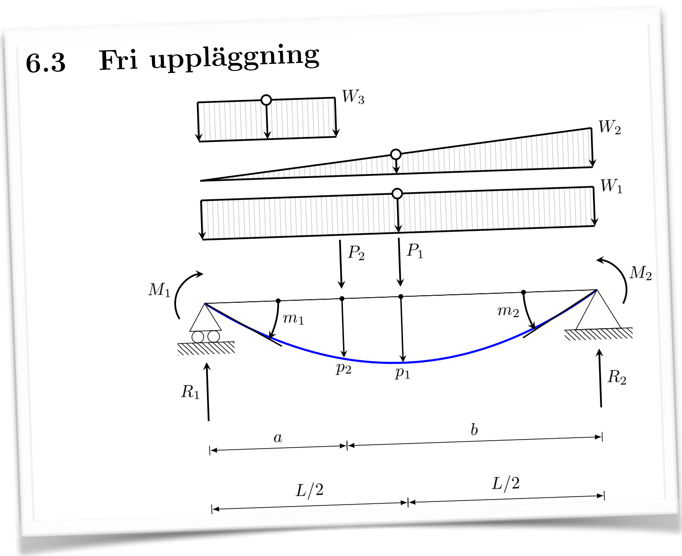
Sätt in alla spänningar = 0 utom $\tau_{xy} = 1.5\,\mathrm{MPa}$ i den första raden, så fås

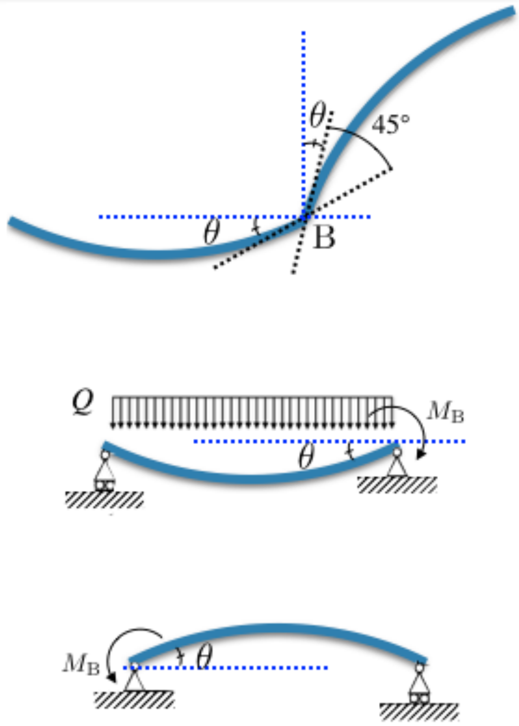
$$\sigma_{\mathrm{e}}^{\mathrm{vM}} = \sigma_{\mathrm{effektiv}}^{\mathrm{vonMises}} = \sqrt{3\tau_{xy}^2} = \sqrt{3}\,\tau_{xy} \approx \boxed{2.6\,\mathrm{MPa}}$$

2. En balk ABC har formats i 45°:s vinkel som figuren antyder, och kan alltså betraktas som två sammanfogade balkar, vardera av längden L. Balkmaterialets elasticitetsmodul är E, och balktvärsnittets yttröghetsmoment är I; båda är konstanta. Momentfria infästningar finns i A, B och C. En jämnt fördelad last av totala storleken Q anbringas på stycket AB. Bestäm vilken vinkel som AB vrider sig runt punkten B. (5p)



Inför vridningsvinkeln θ som i figuren till höger. Dela upp balken i två delar som antyds i de två nedre figurerna till höger. I FS, elementarfall 6.3 finns allt vi behöver veta:





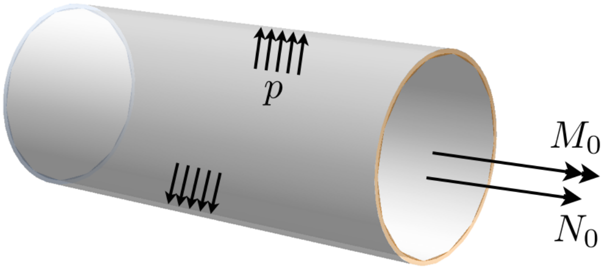
För den mellersta figuren till höger ser vi att vi kan sätta $M_2 = -M_B$ och $W_1 = Q/L$, och kan avläsa

$\theta = m_2 = \dfrac{L}{3EI} \cdot (-M_B) + \dfrac{L^3}{24EI} \cdot \dfrac{Q}{L}$. För den nedersta högra figuren kan vi "vända upp och ned på det hela", och sätta $M_2 = M_B$ och p.s.s. få $\theta = m_2 = \dfrac{L}{3EI} \cdot M_B$. Vi har alltså två ekvationer för de två obekanta θ och M_B, och kan lösa ut

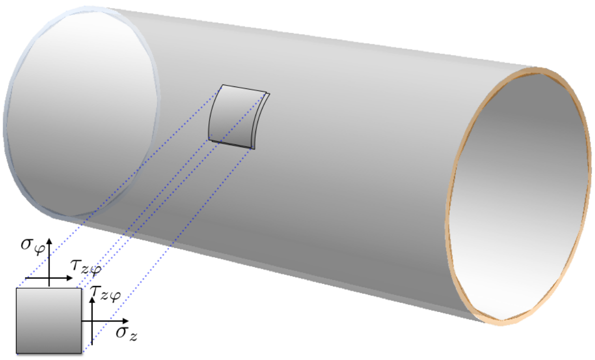
$$\boxed{\theta = \frac{QL^2}{48EI}}$$

3. Ett *öppet* tunnväggigt cylindriskt rör påverkas av ett vridande moment M_0, ett inre övertryck p samt en normalkraft N_0. Rörets medelradie är r, och godstjockleken h. Bestäm huvudspänningarna i en punkt på rörets inre yta. (5p)

[Förenkla inte svaret alltför långt! Kursen handlar inte om algebraisk fingerfärdighet.]



Betrakta ett litet element enligt figuren nedan. Normalkraften N_0 bidrar till normalspänningen i z-led, och eftersom röret är öppet bidrar inte övertrycket till σ_z:



$$\sigma_z = \frac{N_0}{2\pi r h}$$

Enligt FS avsnitt 9 ger övertrycket dock bidrag till normalspänningen i φ-led:

$$\sigma_\varphi = \frac{pr}{h}$$

Det pålagda vridande momentet slutligen bidrar till $\tau_{z\varphi}$ enligt FS avsnitt 2:

> För tunnväggigt cirkulärt tvärsnitt (väggtjocklek t, medelradie $\bar{r}$) fås spänningen som: $\tau(x, r) = M_\mathrm{v}(x)/(2\,\pi\bar{r}^2\,t)$

så vi har $\quad \tau_{z\varphi} = \dfrac{M_0}{2\pi r^2 h}$.

Av de övriga spänningarna på insidan av röret är det bara normalspänningen i radiell led som är nollskild, även om den är liten jämfört med normalspänningen i vinkelled ovan, så vet vi inte om den är liten jämfört med de övriga spänningarna i $z\varphi$-(tangent)planet. Spänningsmatrisen blir alltså:

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \sigma_r & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi & \tau_{z\varphi} \\ 0 & \tau_{z\varphi} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & \frac{pr}{h} & \frac{M_0}{2\pi r^2 h} \\ 0 & \frac{M_0}{2\pi r^2 h} & \frac{N_0}{2\pi r h} \end{pmatrix}$$

(forts. följer.)

(forts. från föregående sida.)
Huvudspänningarna fås nu som egenvärdena till $\boldsymbol{S}$. Lös 'sekularekvationen' det($\boldsymbol{S} - \sigma\,\mathbf{I}$) = 0:

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} \sigma_r - \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi - \sigma & \tau_{z\varphi} \\ 0 & \tau_{z\varphi} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} \\ &= (\sigma_r - \sigma)((\sigma_\varphi - \sigma)(\sigma_z - \sigma) - \tau_{z\varphi}^2) \\ &= (\sigma_r - \sigma)(\sigma^2 - (\sigma_\varphi + \sigma_z)\sigma + \sigma_\varphi\sigma_z - \tau_{z\varphi}^2) \end{aligned}$$

Den ena huvudspänningen är uppenbart $\sigma = \sigma_r = -p$. De två övriga fås som rötter till andragradsekvationen

$$\sigma^2 - (\sigma_\varphi + \sigma_z)\sigma + \sigma_\varphi\sigma_z - \tau_{z\varphi}^2 = 0$$

och är alltså

$$\begin{aligned} \sigma &= -\frac{\sigma_\varphi + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma_\varphi + \sigma_z)^2}{4} - (\sigma_\varphi\sigma_z - \tau_{z\varphi}^2)} \\ &= -\frac{\frac{pr}{h} + \frac{N_0}{2\pi r h}}{2} \pm \sqrt{\frac{(\frac{pr}{h} + \frac{N_0}{2\pi r h})^2}{4} - \left(\frac{pr}{h}\frac{N_0}{2\pi r h} - \left(\frac{M_0}{2\pi r^2 h}\right)^2\right)} \end{aligned}$$

De tre huvudspänningarna är alltså

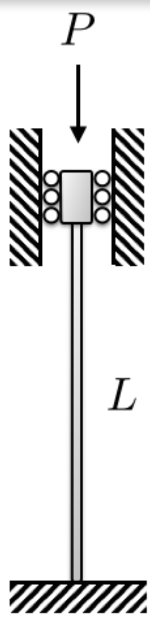
$$-p \quad \text{och} \quad -\frac{\frac{pr}{h} + \frac{N_0}{2\pi r h}}{2} \pm \sqrt{\frac{(\frac{pr}{h} + \frac{N_0}{2\pi r h})^2}{4} - \left(\frac{pr}{h}\frac{N_0}{2\pi r h} - \left(\frac{M_0}{2\pi r^2 h}\right)^2\right)}$$

4. En slank balk är infäst som figuren antyder. En kraft P anbringas i balkens övre ände. Balken har tvärsnittsarean A, yttröghetsmomentet I och elasticitetsmodulen E. Balkmaterialets flytspänning vid tryck är

$$\sigma_{\text{yield}} = \frac{E}{100}.$$

Balkens tvärsnitt är homogent, kvadratiskt med sidan a, där $a = L/20$.

P ökas sakta från 0. Vad inträffar först: Flytning eller knäckning? (5p) (Bortse från säkerhetsfaktorer etc. Svaret skall motiveras utförligt!)



Flytning sker då P blivit så stor att

$$\frac{E}{100} = \sigma_{\text{yield}} = \sigma = \frac{P}{A} = \frac{P}{a^2} = \frac{20^2 P}{L^2} \quad \Rightarrow \quad P = P_{\text{yield}} = \frac{EL^2}{4 \cdot 10^4}$$

Knäckning enligt Eulers fjärde knäckningsfall (FS avsn. 13) sker då P blivit så stor att

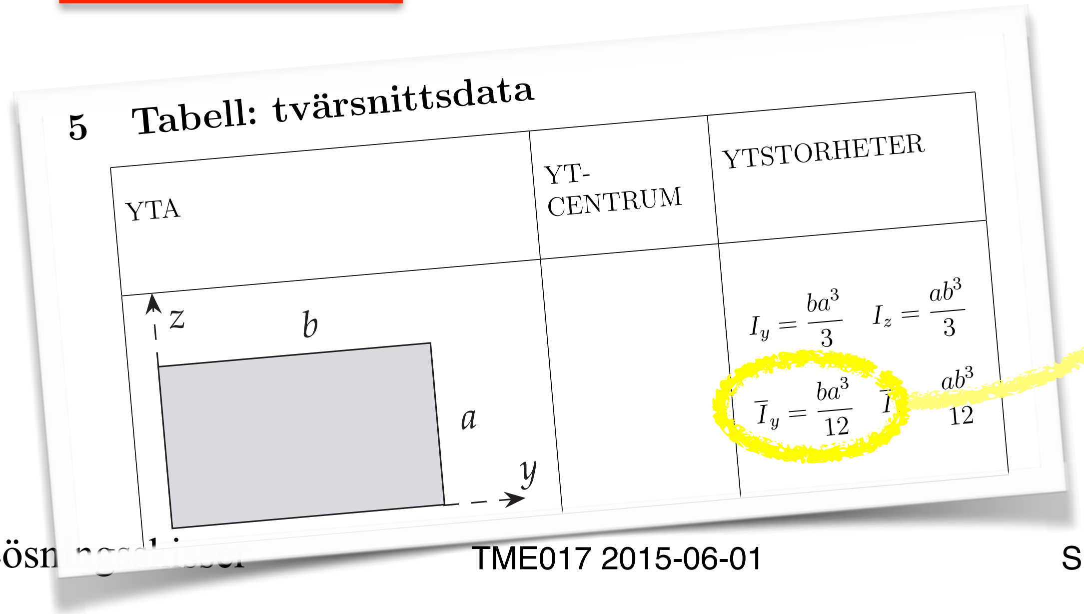
$$P = P_{\text{Euler 4}} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} = \{\text{FS avsn. 5, } \bar{I}_y \text{ för rektangel med } b = a.\}$$

$$= \frac{4\pi^2 E \frac{1}{12}\left(\frac{L}{20}\right)^4}{L^2} = \frac{4\pi^2}{12}\frac{EL^2}{20^4} = \frac{\pi^2}{12}\frac{EL^2}{4 \cdot 10^4}$$

Vilken av dessa är krafter är minst, och uppnås alltså först?

$$\frac{P_{\text{Euler 4}}}{P_{\text{yield}}} = \frac{\pi^2}{12} \approx 0.82 < 1$$

Alltså: knäckning inträffar först.

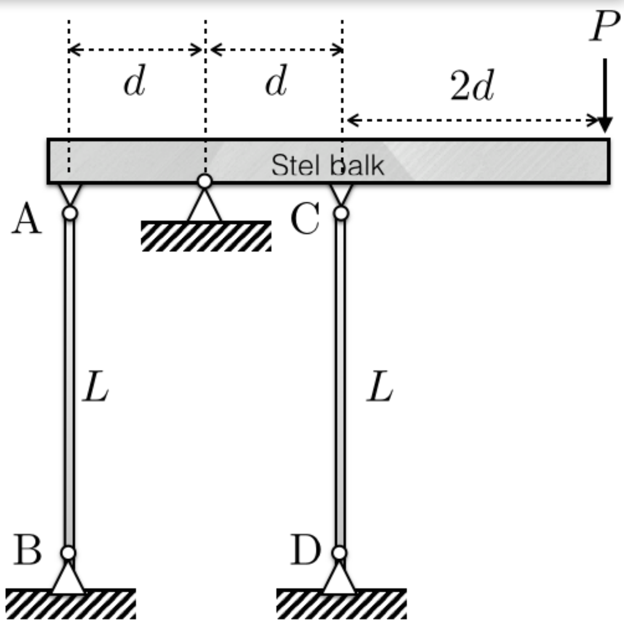


5 Tabell: tvärsnittsdata

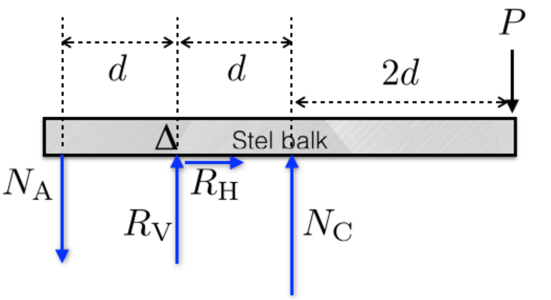
YTA	YT-CENTRUM	YTSTORHETER
z, b, a, y		$I_y = \frac{ba^3}{3}$ $I_z = \frac{ab^3}{3}$ $\bar{I}_y = \frac{ba^3}{12}$ $\bar{I}$ $\frac{ab^3}{12}$

5. En helt stel balk är fäst i två identiska, homogena jämntjocka stänger AB och CD som figuren visar. Stängerna har tvärsnittsarean A och elasticitetsmodulen E. En kraft P anbringas i balkens en ände som figuren antyder.

Bestäm vilken vinkel den stela balken vrides när P anbringas. (5p)



Frilägg den stela balken och inför stångkrafterna och tvångskrafterna från den momentfria leden. Låt Δ beteckna punkten där leden fäster i balken. (Observera mitt val av referensriktningar! Du får givetvis välja andra!)



Jämviktsekvationerna för balken är

$$\begin{cases} \rightarrow: & R_H = 0 & (1) \\ \uparrow: & N_A + R_V - N_C - P = 0 & (2) \\ \curvearrowleft\Delta: & N_A\, d + N_C\, d - P \cdot 3d = 0 & (3) \end{cases}$$

Tre ekvationer men fyra obekanta. R_H kan lösas ur (1), men då återstår endast de två ekvationerna (2) och (3) för de tre obekanta N_A, N_C, R_V. Vi måste ta hänsyn till stängernas deformation. Geometrin ger direkt att om AB *förlängs* sträckan δ, så *förkortas* CD sträckan δ:

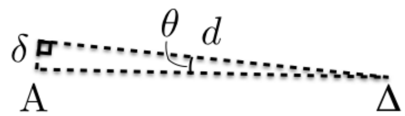
$$\varepsilon_{AB} = \frac{\delta}{L}, \quad \varepsilon_{CD} = -\frac{\delta}{L}$$

Hookes lag ger

$$\left.\begin{aligned} \frac{N_A}{A} &= \sigma_{AB} = E\varepsilon_{AB} = \frac{E\delta}{L} \\ -\frac{N_C}{A} &= \sigma_{CD} = E\varepsilon_{CD} = -\frac{E\delta}{L} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad N_A = N_C \quad (4)$$

Vi har därmed en ytterligare ekvation. Ur (3) och (4) löser vi lätt $N_A = N_C = 3P/2$. Hookes lag ger

$\delta = \dfrac{3PL}{2EA}$. Betrakta nu den rätvinkliga triangeln



Den sökta vridningsvinkeln, betecknad θ i triangeln, fås då som

$$\theta \approx \sin\theta = \frac{\delta}{d} = \boxed{\frac{3PL}{2dEA}}$$