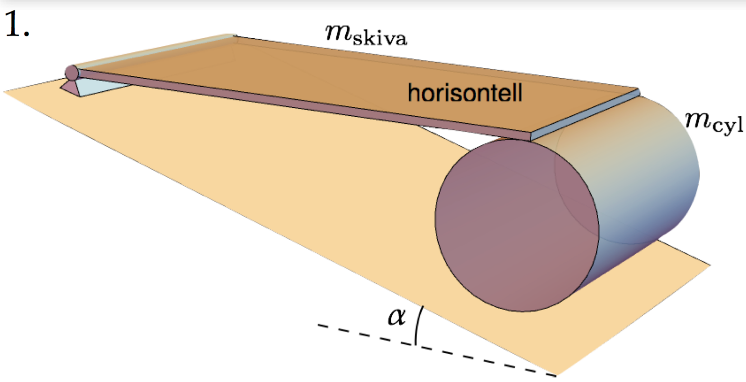
1.

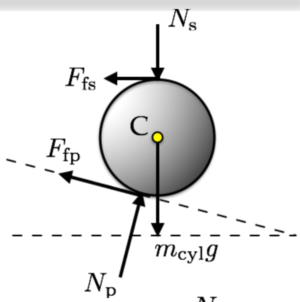


En cylinder vilar på ett strävt sluttande plan som figuren antyder. Ena änden av en sträv horisontell skiva är medelst ett friktionsfritt gångjärn fäst vid planet. Skivans andra ände vilar på cylindern.
Friktionskoefficienten mellan plan och cylinder är μ_{plan}, medan den mellan skiva och cylinder är μ_{skiva}.

Bestäm hur stora μ_{plan} respektive μ_{skiva} **minst** måste vara för jämvikt, uttryckt i massorna m_{skiva}, m_{cyl} och planets lutningsvinkel α. (5p)

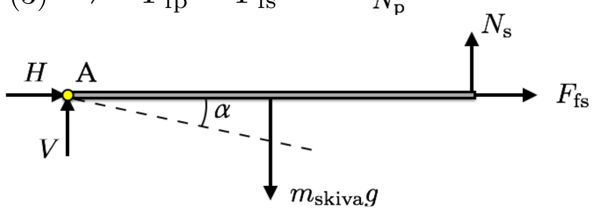
(Inför gärna beteckningar för andra storheter under räkningens gång, men **svaren** skall endast innehålla dessa tre storheter.)

Frilägg först cylindern och ställ upp jämviktsekvationer:



$$\left\{\begin{array}{lrl}
\uparrow: & N_p\cos\alpha + F_{fp}\sin\alpha - N_s - m_{\text{cyl}}\,g = 0 & (1)\\
\rightarrow: & N_p\sin\alpha - F_{fp}\cos\alpha - F_{fs} = 0 & (2)\\
\stackrel{\frown}{\text{C}}: & F_{fs}R - F_{fp}R = 0 & (3) \quad \Rightarrow \quad F_{fp} = F_{fs}
\end{array}\right.$$

Frilägg sedan skivan:



$$\stackrel{\frown}{\text{A}}: \qquad N_s \cdot L - m_{\text{skiva}}g \cdot \tfrac{1}{2}L = 0 \qquad (4) \qquad \Rightarrow \qquad N_s = \tfrac{1}{2}m_{\text{skiva}}\,g$$

$$(2)\ \&\ (3) \ \Rightarrow \quad \frac{F_{fp}}{N_p} = \boxed{\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}}$$ som insatt i (1) tillsammans med (3) och (4) ger

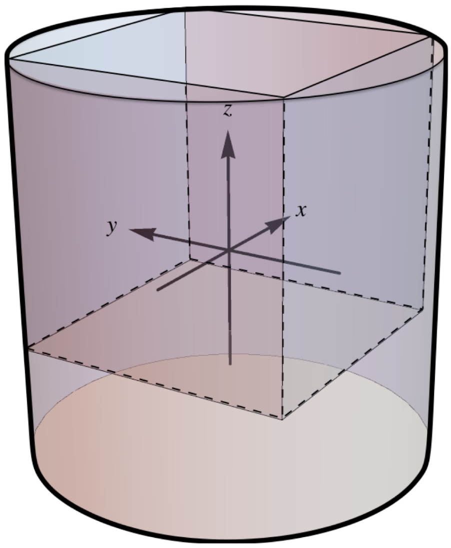
$$F_{fs}\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\cos\alpha + F_{fs}\sin\alpha = \left(\tfrac{1}{2}m_{\text{skiva}} + m_{\text{cyl}}\right) g$$

dvs

$$\frac{F_{fs}}{N_s} = \boxed{\left(1 + 2\frac{m_{\text{cyl}}}{m_{\text{skiva}}}\right)\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

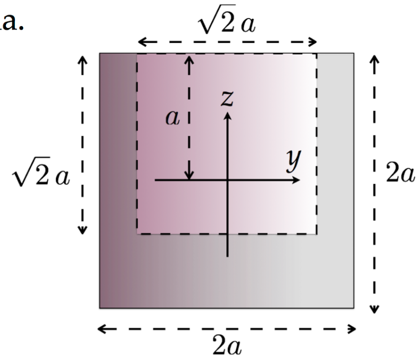
Svar: $\mu_{\text{plan}} \ge \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$, $\mu_{\text{skiva}} \ge \left(1 + 2\dfrac{m_{\text{cyl}}}{m_{\text{skiva}}}\right)\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ ■

2.



En homogen cirkulär cylinder av radie a och höjden $2a$ gröps ur så att ett kubiskt hål av sidan $\sqrt{2}a$ bildas från cylinderns ena en ändyta som figurerna antyder. Bestäm x-, y- och z-koordinaterna för den urgröpta cylinderns masscentrum i det koordinatsystem som anges i figurerna. (5p)

(xyz-systemets origo är cylinderns mittpunkt.)



Symmetri ger direkt masscentrumskoordinaterna i x- och y-led: $\overline{x} = 0 = \overline{y}$
För att finna z-koordinaten för masscentrum: använd metoden att "subtrahera hål".

$$V_{\mathrm{cyl}} = \pi a^2 \cdot 2a = 2\pi\, a^3, \quad \overline{z}_{\mathrm{cyl}} = 0, \quad V_{\mathrm{kub}} = (\sqrt{2}a)^3 = 2\sqrt{2}\, a^3, \quad \overline{z}_{\mathrm{kub}} = a - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}a$$

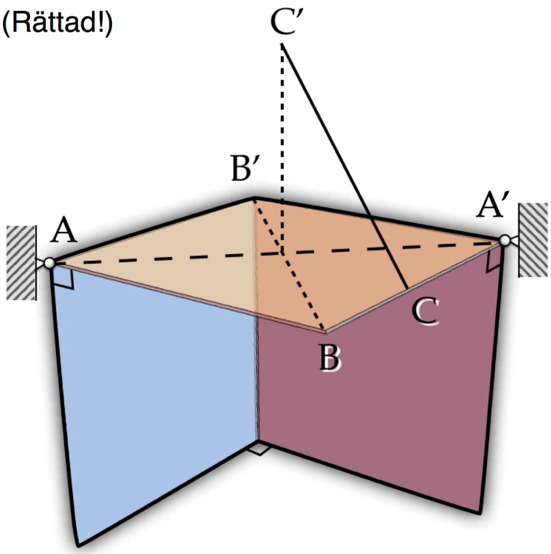
så

$$\overline{z} = \frac{\left(\sqrt{2} - 2\right) a}{\sqrt{2}\pi - 2}$$

Svar: $\overline{x} = 0 = \overline{y}$, $\overline{z} = \dfrac{\left(\sqrt{2} - 2\right) a}{\sqrt{2}\pi - 2}$

■

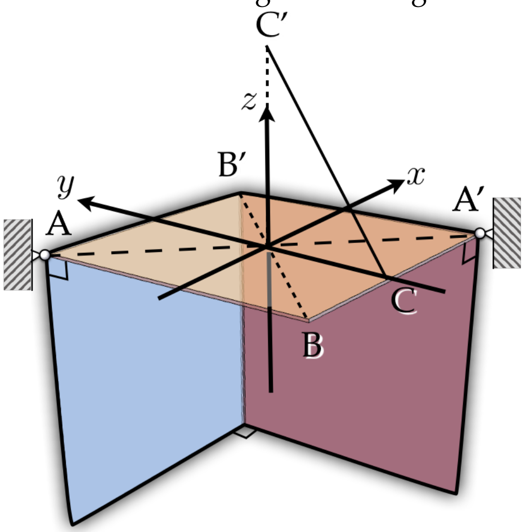
3. (Rättad!)



Tre likadana kvadratiska, plana, tunna och homogena plåtar är hopsvetsade i räta vinklar mot varandra till ett s.k. "Q-hörn", som figuren visar. Var och en av plåtarna har massan m och sidlängden a. Den övre plåten ABA'B' är friktionsfritt vridbar kring axeln AA', men hålls i jämvikt i horisontellt läge med hjälp av en stång CC'. Punkten C ligger på mitt på sidan BA', och stångens fäste i taket i punkten C' ligger på avståndet a rakt ovanför plåten ABA'B':s mittpunkt.

Bestäm stångkraften i stången CC'. (5p)
(Anta momentfria fästen i stångens båda ändar!)

Krafterna på stången utgör ett tvåkraftsystem. Stångkraften är alltså riktad i stångens riktning. En enhetsvektor i stångens riktning är



$$\mathbf{e}_{\mathrm{C'C}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{C'C}}}{|\overrightarrow{\mathrm{C'C}}|} = \frac{(0, -\frac{1}{2}a, -a)}{\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + a^2}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}(0, 1, 2)$$

Kraften **på** Q-hörnet **från** stången: $S\mathbf{e}_{\mathrm{C'C}}$

Momentjämvikt för Q-hörnet kring axeln AA':

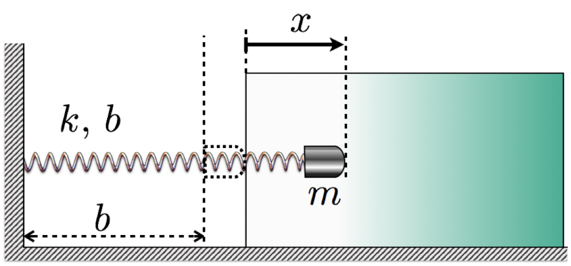
$$\frac{1}{2\sqrt{2}}a\,mg + \frac{1}{2\sqrt{2}}a\,mg - \frac{1}{2\sqrt{2}}a\,\frac{2}{\sqrt{5}}S = 0$$

$$\Rightarrow \quad S = \sqrt{5}\,mg$$

Svar: Stångkraften är alltså en tryckkraft (pga NIII) av storleken $\sqrt{5}\,mg$.

■

4. En projektil av massan m skjuts med begynnelsehastigheten v_0 in i en kropp med ett i rummet varierande rörelsemotstånd av storleken $D = c_1\, x\, v$, där c_1 är en (positiv) konstant. (Rörelsemotståndet från materialet i kroppen ökar alltså linjärt med inträngningsdjupet x i figuren, och är dessutom proportionellt mot hastigheten.)



Projektilen är också fäst i ena änden av en linjär fjäder som är ospänd då $x = 0$. (Se figuren, där b är fjäderns ospända längd.) Bestäm hur långt projektilen som längst kommer att tränga in i kroppen. [Du *får* svara med ett integraluttryck.] (5p)
(Förloppet antas så snabbt att vi kan bortse från tyngdkraften under rörelsen.)

NII för projektilen: $-k\,x - c_1\,x\,v(x) = m\,v(x)\dfrac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}x}$.

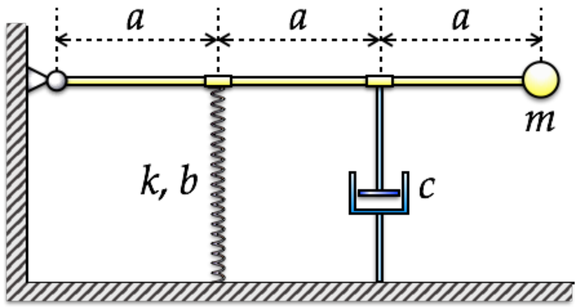
Begynnelsevillkor: $v(0) = v_0$.

Separera variablerna: $\displaystyle\int_0^d x\,\mathrm{d}x = -\int_{v_0}^0 \frac{m\,v}{k + c_1 v}\,\mathrm{d}v$.

Alltså: $d = \sqrt{2\displaystyle\int_0^{v_0} \frac{m\,v}{k + c_1 v}\,\mathrm{d}v}$.

Svar: $\sqrt{2\displaystyle\int_0^{v_0} \frac{m\,v}{k + c_1 v}\,\mathrm{d}v}$ ■

5. En massa m av försumbar utsträckning är fäst i ena änden av en lätt stång av längden $3a$, som figuren visar. Stången är i sin andra ände fäst i en orubblig vägg medelst en friktionsfri led. Stången kan röra sig i ett vertikalplan, och är i fäst en vertikal linjärt elastisk fjäder och en vertikal linjär dämpare enligt figuren. I jämviktsläget är stången horisontell. Systemet utför små svängningar kring detta jämviktsläge.



a) Bestäm systemets odämpade egenvinkelfrekvens. (2p)
b) Bestäm systemets dimensionslösa dämpningskonstant. (3p)

Ställ upp rörelsemängdsmomentslagen för (lätt) stång + massa med avseende på fästpunkten i väggen:

$$-(k\,a\,\varphi)\cdot a - (c\,2a\,\dot\varphi)\cdot 2a = m(3a)^2\ddot\varphi$$

dvs
$$\ddot\varphi + \frac{4c}{9m}\dot\varphi + \frac{k}{9m}\varphi = 0$$

Jämför detta med standardformen av svängningsekvationen:

$$\ddot\varphi + 2\,\zeta\,\omega\,\dot\varphi + \omega^2\,\varphi = 0$$

Identifiera koefficienterna:
$$2\,\zeta\,\omega = \frac{4c}{9m}, \quad \omega^2 = \frac{k}{9m}$$

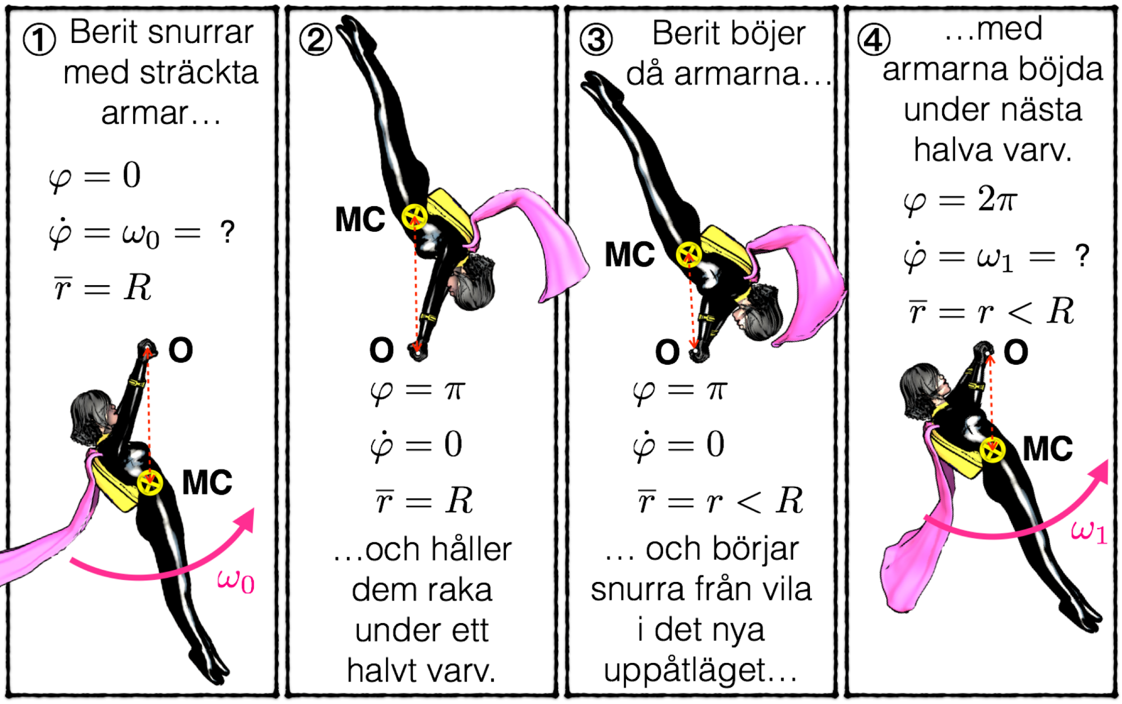
Alltså:
$$\omega = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \zeta = \frac{4c}{2\omega\cdot 9m} = \frac{2c}{\frac{1}{3}\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot 9m} = \frac{2c}{3\sqrt{mk}}$$

Svar: a) $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{k}{m}}$, b) $\frac{2c}{3\sqrt{mk}}$.

■

6. 

Våghalsen Berit Grahnat-Jansson skall friktionsfritt rotera runt en horisontell ribba och sedan utföra ett s.k. BASE-jump. Under rotationen kring ribban börjar hon med en vinkelhastighet ω_0 i nedåtläget (se ① nedan), snurrar ett halvt varv till uppåtläget (②), böjer armarna som figurerna antyder (③), och snurrar därefter ytterligare ett halvt varv (④) innan hon hoppar.



Antag att masströghetsmomentet m.a.p. masscentrum, $\bar I_O$, för Berit + fallskärm **inte ändras nämnvärt** när hon böjer armarna. **Däremot ändras** masscentrums avstånd till rotationsaxeln genom O i figuren ovan från R till r ($< R$). Totala massan för Berit + fallskärm är m.

a) Bestäm hur stor initial vinkelhastighet ω_0 som behövs för att Berit skall nå uppåtläget $\varphi = \pi$ med vinkelhastigheten noll. (2p)

b) Beräkna med vilken vinkelhastighet ω_1 som Berit passerar $\varphi = 2\pi$. (3p)

Mellan läge 1 och läge 2 bevaras den totala mekaniska energin, så

$$T_1 + V_1 = \tfrac{1}{2}(\bar I_O + mR^2)\omega_0^2 - mgR = 0 + mgR = T_2 + V_2$$

Alltså:

$$\text{Svar a)} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{4mgR}{\bar I_O + mR^2}}$$

Även mellan läge 3 och läge 4 bevaras energin, så

$$T_3 + V_3 = 0 + mgr = \tfrac{1}{2}(\bar I_O + mr^2)\omega_1^2 - mgr = T_4 + V_4$$

så

$$\text{Svar b)} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{4mgr}{\bar I_O + mr^2}}$$

■