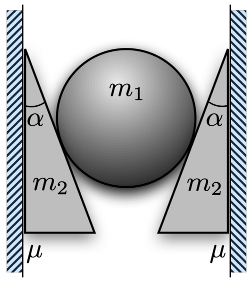
Lösningsskisser till tentamen TME011 2020-10-24

$p < 12$	$12 \le p < 18$	$18 \le p < 24$	$24 \le p$
U	3	4	5

1. 

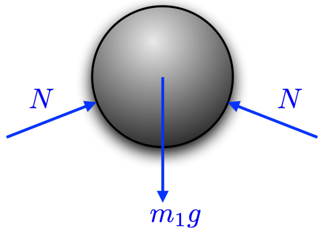
Ett glatt klot av massan m_1 vilar friktionsfritt mot två kilar, vilka i sin tur pressas mot två sträva vertikala väggar. Friktionskoefficienten mellan kilarna och väggarna är μ. Vardera kilen har massan m_2. Toppvinkeln för kilarna är α.

Ställ upp lagom många ekvationer för att kunna bestämma det minsta möjliga värde på μ för att jämvikt skall vara möjlig i det angivna läget!

(Symmetri får utnyttjas.) (5p)

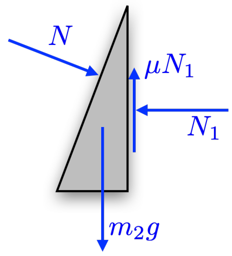
(Du <u>behöver inte lösa</u> ekvationssystemet.)

Frilägg klotet och ställ upp kraftjämviktsekvationen i vertikalled!
(Symmetri eller kraftjämvikt i horisontalled ger direkt att de båda normalkrafterna är lika stora.)



$$\uparrow: \quad 2N\sin\alpha - m_1 g = 0 \quad (1)$$

Frilägg ena kilen och ställ upp kraftjämviktsekvationer i vertikal- och horisontalled!
Antag fullt utvecklad friktion, dvs att systemet är på gränsen till glidning.



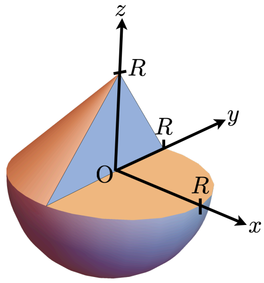
$$\uparrow: \quad \mu N_1 - m_2 g - N\sin\alpha = 0 \quad (2)$$

$$\rightarrow: \quad -N_1 + N\cos\alpha = 0 \quad (3)$$

Ekvationerna (1), (2), (3) är tre oberoende ekvationer för de tre obekanta N, N_1, μ.

Svar: Ekvationerna (1), (2), (3).

■

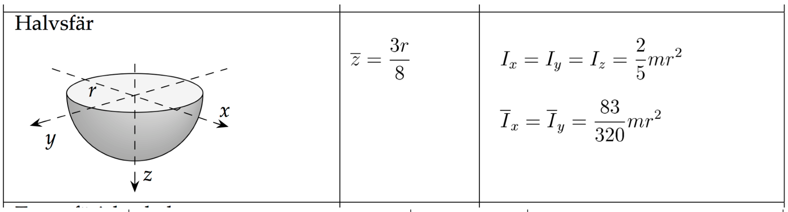
2. 

En homogen massiv kropp är sammansatt av en halv rak cirkulär kon och en halv sfär, båda av samma material. (Kroppen är alltså massiv, inte bara ett skal.) Se figuren för mått och ett koordinatsystem $Oxyz$. Bestäm, för den sammansatta kroppen, dess masscentrums koordinater *i koordinatsystemet* $Oxyz$.

(Stryk gärna t.ex. gemensamma faktorer i täljare och nämnare, men lägg inte en massa tid på att förenkla.) (5p)

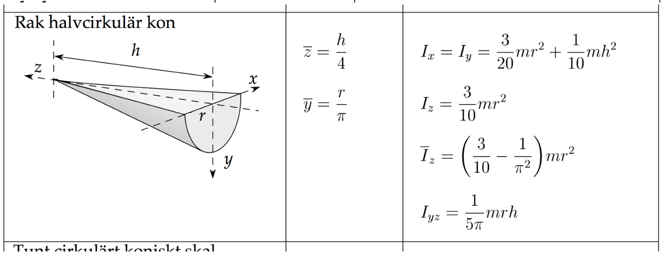
Spegelsymmetri i xz-planet ger att $\overline{y} = 0$.

Halvsfären har volymen
$V_{\text{hs}} = \frac{1}{2}\frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{2\pi}{3}R^3.$
MM Japp ger för halvsfären:
$\overline{x}_{\text{hs}} = 0,\ \overline{z}_{\text{hs}} = -\frac{3R}{8}.$



Halvsfär	$\overline{z} = \frac{3r}{8}$	$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}mr^2$ $\overline{I}_x = \overline{I}_y = \frac{83}{320}mr^2$

Halvkonen har volymen $V_{\text{hk}} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{3}R^2 \cdot R = \frac{\pi}{6}R^3$.
MM Japp ger för halvkonen:
$\overline{x}_{\text{hk}} = -\frac{R}{\pi},\ \overline{z}_{\text{hk}} = \frac{1}{4}R.$



Rak halvcirkulär kon	$\overline{z} = \frac{h}{4}$ $\overline{y} = \frac{r}{\pi}$	$I_x = I_y = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{1}{10}mh^2$ $I_z = \frac{3}{10}mr^2$ $\overline{I}_z = \left(\frac{3}{10} - \frac{1}{\pi^2}\right)mr^2$ $I_{yz} = \frac{1}{5\pi}mrh$

Formeln för sammansatt kropps masscentrum ger då:

$$\overline{x} = \frac{\overline{x}_{\text{hs}}V_{\text{hs}} + \overline{x}_{\text{hk}}V_{\text{hk}}}{V_{\text{hs}} + V_{\text{hk}}} = \frac{0 \cdot \frac{2\pi}{3}R^3 - \frac{1}{\pi}R \cdot \frac{\pi}{6}R^3}{\frac{2\pi}{3}R^3 + \frac{\pi}{6}R^3} = -\frac{1}{5\pi}R$$

$$\overline{z} = \frac{\overline{z}_{\text{hs}}V_{\text{hs}} + \overline{z}_{\text{hk}}V_{\text{hk}}}{V_{\text{hs}} + V_{\text{hk}}} = \frac{-\frac{3}{8}R \cdot \frac{2\pi}{3}R^3 + \frac{1}{4}R \cdot \frac{\pi}{6}R^3}{\frac{2\pi}{3}R^3 + \frac{\pi}{6}R^3} = -\frac{1}{4}R.$$

Svar: $\overline{x} = -\frac{1}{5\pi}R$

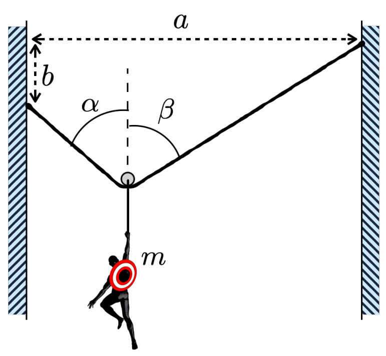
$\overline{y} = 0$

$\overline{z} = -\frac{1}{4}R$

■

Tack till den student som påpekade slarvet i denna lösnings förra version!

3.



En lätt otänjbar kabel av totala längden L är fäst i två fasader, med ena fästpunkten en sträcka b under den andra. Avståndet mellan fasaderna är a. En liten friktionsfri trissa kan rulla längs kabeln. Från trissan hänger Kapten Obsolet, vars kropp och utrustning tillsammans har massan m.

I figuren finns två vinklar, α och β, markerade. De är vinklarna mellan lodlinjen och kabelns båda delar.

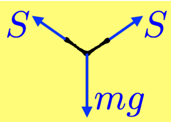
a) Visa att kraftjämvikt kräver att $\alpha = \beta$. (1p)

b) Givet påståendet i a), visa att $a = L \sin \alpha$. (1p)

c) Givet påståendena i a) och b), ställ upp lagom många ekvationer för att kunna bestämma linkraften S i kabeln vid jämvikt. (3p)

---

a) Friläggning av trissan + momenjämvikt kring trissans centrum ger att linkraften är av samma storlek S på båda sidor om trissan. (Behöver ej visas för full poäng, utan kan tas för "självklart".) Frilägg en liten bit av kabeln precis under trissan och ställ upp kraftjämvikt i horisontalled:

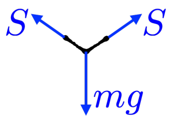


$$\rightarrow: \quad -S \sin \alpha + S \sin \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta.$$

b) Kalla längden av kabeln till vänster om trissan för ℓ_1 och längden till höger ℓ_2.

$$a = \ell_1 \sin \alpha + \ell_2 \sin \alpha = (\ell_1 + \ell_2) \sin \alpha = L \sin \alpha, \quad \text{ty } \ell_1 + \ell_2 = L.$$

c) Frilägg en liten bit av kabeln precis under trissan och ställ upp kraftjämvikt i vertikalled:

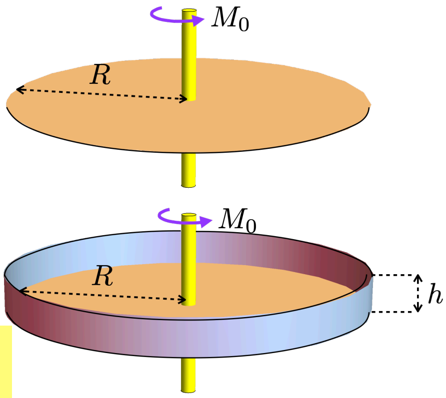


$$\uparrow: \quad 2S \cos \alpha - mg = 0$$

Svar c): Ekvationen $a = L \sin \alpha$ (från b-uppgiften) tillsammans med jämviktsekvationen $2S \cos \alpha - mg = 0$ är två oberoende ekvationer för de två obekanta α och S.

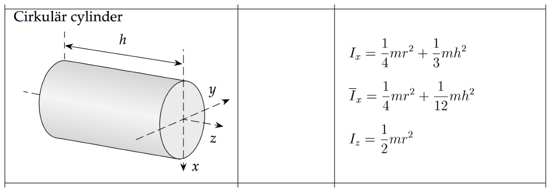
■

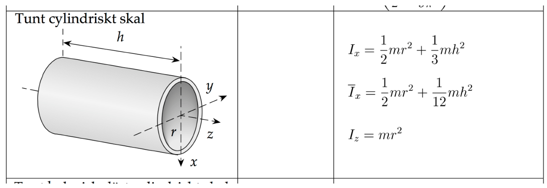
4. En tunn homogen cirkelskiva av plåt har ytdensiteten σ_0 (som alltså har dimensionen massa per areaenhet) och radien R. Skivan är fäst i en vertikal axel genom dess centrum. Skivan med axel är initialt i vila. Vid tiden $t = 0$ anbringas ett konstant moment M_0 på axeln.
På en exakt likadan skiva har en fläns av höjden h svetsats fast som den undre figuren antyder. Flänsen är tillverkad av samma sorts plåt som skivorna. Också på detta system anbringas det konstanta momentet M_0 vid $t = 0$.
Bestäm för vart och ett av systemen hur lång tid det tar att nå en viss given rotationshastighet ω_1. (5p)



Kalla det övre systemet (det utan fläns) för system nr 1, och det nedre systemet (det med fläns) system nr 2.

Impulsmomentlagen m.a.p. den vertikala axeln säger oss att $M_0 t_i = I_i\,\omega_1 - I_i \cdot 0$, där I_i är masströghetsmomentet för respektive system, och t_i den tid det tar för system nr i att nå den önskade vinkelhastigheten ω_1.





Enligt formelsamlingen är

$$I_1 = \tfrac{1}{2}(\pi R^2 \sigma_0) R^2 = \tfrac{1}{2}\pi\sigma_0 R^4$$

och

$$I_2 = I_1 + (2\pi R h\,\sigma_0) R^2 = \tfrac{1}{2}\pi\sigma_0 R^3 (R + 4h).$$

Alltså har vi svaret:

Svar:

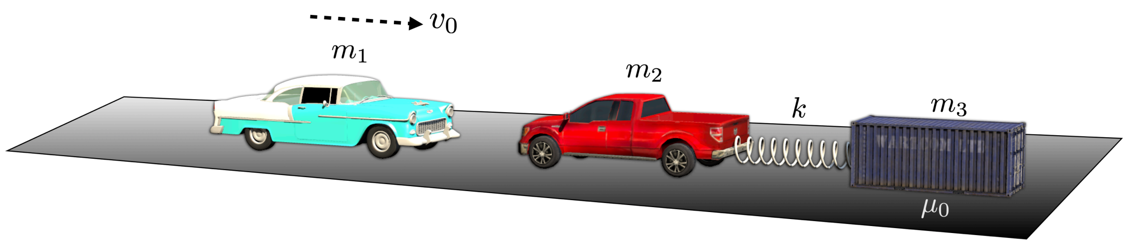
Utan fläns: $t_1 = \frac{1}{2}\pi\sigma_0 R^4 \dfrac{\omega_1}{M_0}$.

Med fläns: $t_2 = \frac{1}{2}\pi\sigma_0 R^3 (R + 4h) \dfrac{\omega_1}{M_0}$.

■

5. En bil av massan m_1 rör sig med farten v_0 åt höger i figuren. Den kolliderar med en annan bil, vilken är stillastående och av massan m_2, och fastnar i fastnar därvid i den andra bilen. Båda bilarna fortsätter nu att rulla tillsammans, med försumbar friktion mot vägbanan.
Den andra bilen är medelst en linjär fjäder med fjäderkonstanten k förbunden med en låda av massan m_3. Fjädern är i kollisionsögonblicket ospänd. Mellan lådan och vägbanan är vilo-friktionskoefficienten μ_0.
Bestäm hur stor v_0 högst får vara för att inte lådan alls skall glida på vägbanan efter kollisionen!

(5p)

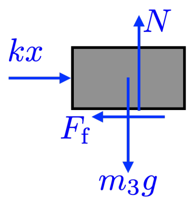


Rörelsemängden för systemet (bilar+fjäder+låda) bevaras i kollisionen, så

$$m_1 v_0 = (m_1 + m_2) v_1 \quad (1)$$

där v_1 är den gemensamma farten för bilarna omedelbart efter kollisionen.

Låt x vara fjäderns för*kort*ning. Frilägg lådan:
Ställ upp jämviktsvillkoren för lådan.



$$\begin{cases} \uparrow: & N - m_3 g = 0 \quad (2) \\ \rightarrow: & kx - F_\mathrm{f} = 0 \quad (3) \\ \text{Friktionsvillkor}: & |F_\mathrm{f}| \le \mu_0 N \quad (4) \end{cases}$$

Så länge lådan förblir i vila efter kollisionen uträttas inget arbete av icke-konservativa krafter på systemet (bilar+fjäder+låda). Alltså bevaras den totala mekaniska energin, så $\Delta T + \Delta V = 0$. Den maximala förkortningen x_max av fjädern uppfyller alltså

$$-\tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)\, v_1^2 + \tfrac{1}{2} k\, x_\mathrm{max}^2 = 0 \quad (5)$$

Ekvationerna (2), (3) och (4) ger villkoret

$$x_\mathrm{max} \le \frac{\mu_0 m_3 g}{k} \quad (6)$$

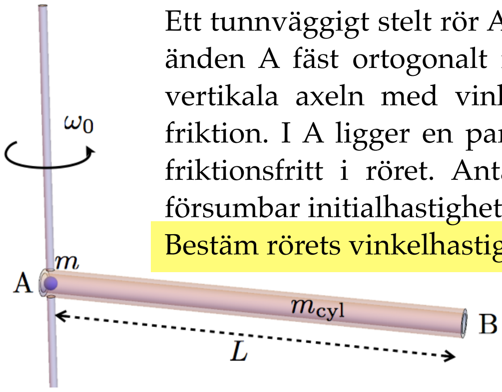
medan ekvationerna (1) och (5) ger

$$v_0 = \frac{\sqrt{k}\sqrt{m_1 + m_2}}{m_1} x_\mathrm{max} \quad (7)$$

Ekvationerna (6) och (7) ger tillsammans svaret

Svar: $v_0 \le \dfrac{\mu_0 m_3 g \sqrt{m_1 + m_2}}{m_1 \sqrt{k}}$.

■

6. 

Ett tunnväggigt stelt rör AB av längden L och radien $r << L$ samt massan m_{cyl} är i änden A fäst ortogonalt mot en vertikal axel. Röret sätts i rotation kring den vertikala axeln med vinkelhastigheten ω_0, men släpps sedan att rotera utan friktion. I A ligger en partikel med massan m stilla i röret. Partikeln kan glida friktionsfritt i röret. Antag att partikeln får en liten knuff så att den (med försumbar initialhastighet) börjar glida utåt i röret.

Bestäm rörets vinkelhastighet ω i det ögonblick partikeln lämnar röret. (5p)

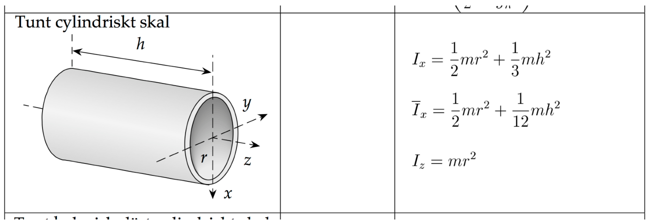
Rörelsemängdsmomentet för systemet rör + partikel bevaras under tiden mellan partikelns start och tiden då partikeln lämnar röret. Masströghetsmomentet för <u>röret</u> med avseende på den vertikala axeln är enligt formelsamlingen

$$I^{\text{rör}} = \tfrac{1}{2} m_{\text{rör}} r^2 + \tfrac{1}{3} m_{\text{rör}} L^2 \approx \tfrac{1}{3} m_{\text{rör}} L^2 \quad (1)$$

Masströghetsmomentet för <u>partikeln</u> med avseende på den vertikala axeln är

$$I^{\text{partikel}} = m x^2$$

där x är avståndet mellan partikeln och axeln.



Rörelsemängdsmomentet med avseende på den vertikal axeln är för systemet rör + partikel vid start

$$L_1 = I^{\text{rör}} \omega_0$$

och i separationsögonblicket

$$L_2 = (I^{\text{rör}} + mL^2)\omega$$

och alltså är vårt

Svar: $\omega = \dfrac{I^{\text{rör}}}{(I^{\text{rör}} + mL^2)} \omega_0$ där $I^{\text{rör}}$ ges av ekvation (1) ovan.

■