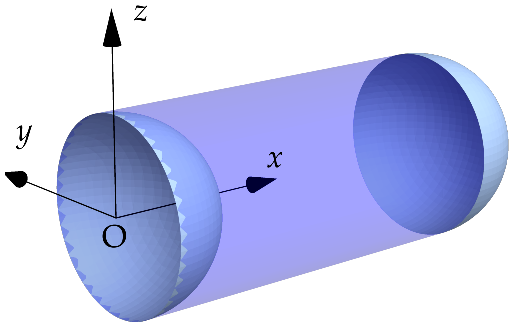
1.



I ena änden av homogen cirkulär cylinder med höjd H och radien R har en homogen halvsfärisk kropp (av samma material) limmats fast, samtidigt som en halvsfär har gröpts ut ur cylinderns andra ände. I figuren finns angivet ett koordinatsystem Oxyz med origo i centrum av den ursprungliga cylinderns ena ändyta. Bestäm masscentrums koordinater i koordinatsystemet Oxyz! [5p]

(Kontrollfråga: Svarar du med masscentrums koordinater i rätt system?)

Symmetri m.a.p. xz-planet ger att $\bar{y} = 0$. Symmetri m.a.p. xy-planet ger att $\bar{z} = 0$.

Beteckna den ursprungliga cylindern som kropp ①, den ditsatta halvsfäriska kroppen som kropp ② och den borttagna halvsfären som kropp ③. Då är

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_{①}V_{①} + \bar{x}_{②}V_{②} - \bar{x}_{③}V_{③}}{V_{①} + V_{②} - V_{③}} = \frac{\bar{x}_{①}V_{①} + (\bar{x}_{②} - \bar{x}_{③})V_{②}}{V_{①}} = \frac{\bar{x}_{①}V_{①} + H\,V_{②}}{V_{①}}$$

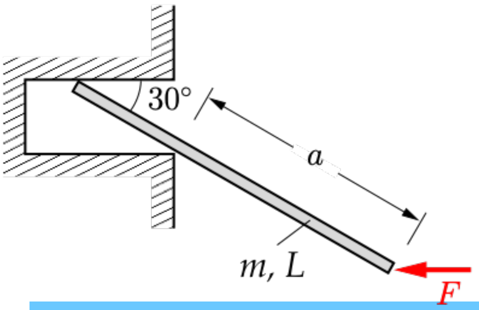
eftersom $V_{②} = V_{③}$ och $\bar{x}_{②} = \bar{x}_{③} + H$.

Vi har också $V_{①} = \pi R^2 H$, $\bar{x}_{①} = \frac{1}{2}H$, $V_{②} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$ så slutligen är

$$\bar{x} = \tfrac{1}{2}H + \tfrac{2}{3}R.$$

■

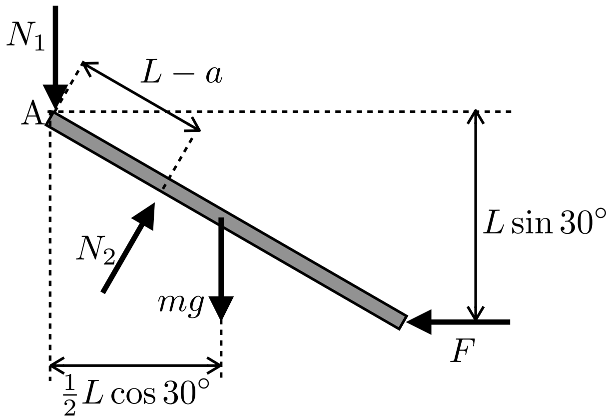
2.



En stel slank balk av massan m och längden L hålls med hjälp av en horisontell kraft av storlek F på plats i den position som figuren visar. (Lodriktningen är nedåt i figuren.) Bestäm hur stor F måste vara för jämvikt. Bortse från all friktion. [5p]

[Det räcker för full poäng att ställa upp rätt ekvationer varur F kan beräknas. Ingen algebraisk machismo alltså! Kom ihåg att alla ekvationer skall motiveras!]

Frilägg balken.



Jämviktsekvationer:

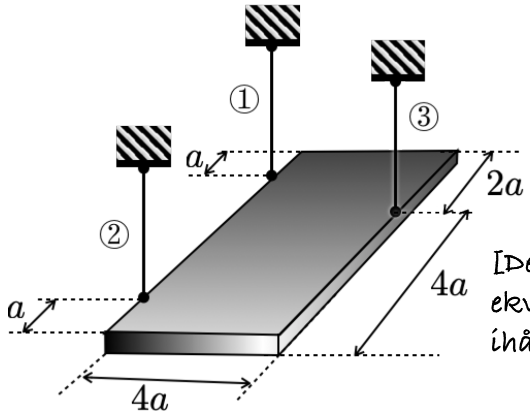
$$
\begin{cases}
\uparrow: & N_2\cos 30° - N_1 - mg = 0 \quad (1)\\
\rightarrow: & N_2\sin 30° - F = 0 \quad (2)\\
\overset{\frown}{\mathrm{A}}: & F\cdot L\sin 30° - N_2\cdot(L-a) + mg\cdot\frac{1}{2}L\cos 30° = 0 \quad (3)
\end{cases}
$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Svar: } F = \frac{\sqrt{3}\,L}{6L-8a}mg}$$

men det räcker att svara med ekvationerna (1), (2) och (3)!

■

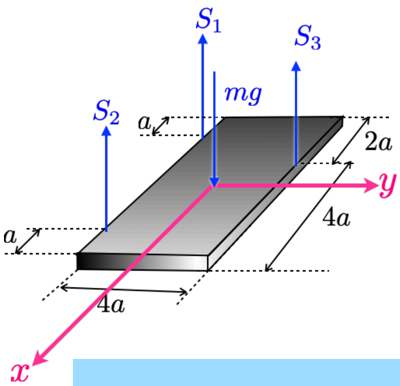
3.



En homogen, jämntjock plåt med massan m hålls i jämvikt i horisontellt läge med hjälp av tre vertikala linor (numrerade ①, ②, ③ i figuren). Bestäm linkrafterna i de tre linorna. [5p]

[Det räcker för full poäng att ställa upp rätt ekvationer varur linkrafterna kan beräknas. Kom ihåg att alla ekvationer skall motiveras!]

Tyngdkraftens resultant är mg och angriper i plåtens mittpunkt. Beteckna linkrafterna med S_1, S_2 respektive S_3. Frilägg plåten och uppställ jämviktsekvationer:



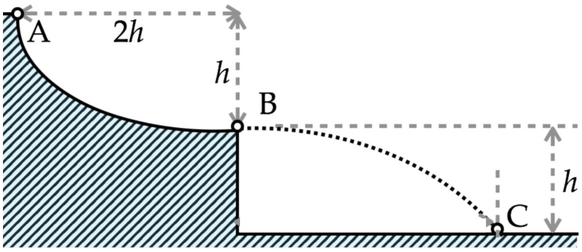
$$\begin{cases} \downarrow: & S_1 + S_2 + S_3 - mg = 0 \quad (1) \\ \Sigma M_x = 0: & S_3 \cdot 2a - S_1 \cdot 2a - S_2 \cdot 2a = 0 \quad (2) \\ \Sigma M_y = 0: & S_1 \cdot 2a + S_3 \cdot a - S_2 \cdot 2a = 0 \quad (3) \end{cases}$$

Svar: $S_1 = \frac{1}{8}mg, \quad S_2 = \frac{3}{8}mg, \quad S_3 = \frac{1}{2}mg.$

men det räcker att svara med ekvationerna (1), (2) och (3)!

■

4. En partikel med massan m släpps från vila i punkten A i figuren, och glider längs en glatt kvarts-elliptisk rutschkana (halvaxlar h och $2h$ enligt figuren). I B flyger partikeln rakt ut i horisontell riktning och faller sedan fritt. Den landar i punkten C. Bestäm **storleken av partikelns vertikala hastighetskomponent** omedelbart innan landningen sker! (Se figuren.) [5p]



Enkel lösning: Mellan B och C gäller för den vertikala hastighetskomponenten (om vi räknar den positiv nedåt):

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = \text{konstant} = g$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^{v_{\mathrm{C\,vert}}} v\,\mathrm{d}v = \int_0^h g\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{2}v_{\mathrm{C\,vert}}^2 = gh \quad \Rightarrow \quad |v_{\mathrm{C\,vert}}| = \sqrt{2gh}.$$

Svar: $\sqrt{2gh}$.

■

Krånglig lösning:

A $\rightarrow$ B :

Mellan A och B bevaras den totala mekaniska energin för partikeln, så om vi sätter nollnivån för den potentiella energin i tyngdkraftfältet på samma höjd som B har vi

$$mgh = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{B}}^2 \quad \Rightarrow \quad v_{\mathrm{B}} = \sqrt{2gh}$$

B $\rightarrow$ C :

Under rörelsen från B till C påverkas partikeln inte av några krafter i horisontalled, så den horisontella hastighets-komponentens storlek är konstant $= v_{\mathrm{B}}$. Om vi betecknar den sökta vertikala hastighetskomponenten i C med v_{Cvert}, så är

$$\Delta T = \tfrac{1}{2}m(v_{\mathrm{B}}^2 + v_{\mathrm{Cvert}}^2) - \tfrac{1}{2}mv_{\mathrm{B}}^2 = \tfrac{1}{2}mv_{\mathrm{Cvert}}^2$$
$$\Delta V = 0 - mgh$$

Alltså, enligt energilagen,

$$0 = \Delta T + \Delta V = \tfrac{1}{2}mv_{\mathrm{Cvert}}^2 - mgh \quad \Rightarrow \quad |v_{\mathrm{Cvert}}| = \sqrt{2gh}$$

Svar: $\sqrt{2gh}$.

■

5. En partikel med massan m skjuts med begynnelsefarten v_0 in i ett rör och pressar ihop gasen framför sig under sin rörelse in i röret. Den komprimerade gasen ger ett rörelsemotstånd på partikeln av storleken $F_0 \frac{s}{s_0}$. (s är sträckan partikeln färdats in i röret. F_0 och s_0 är konstanter.) Bestäm hur långt partikeln tränger in i röret innan dess hastighet är noll! [5p]

Newtons andra lag för partikeln, med användning av kedjeregeln för accelerationen:

$$m\, v(s) \frac{\mathrm{d}v(s)}{\mathrm{d}s} = -F_0 \frac{s}{s_0}$$

Ekvationen är separabel, och vi får med samhörande integrationsgränser

$$m \int_{v_0}^{0} v \, \mathrm{d}v = -\frac{F_0}{s_0} \int_0^d s \, \mathrm{d}s$$

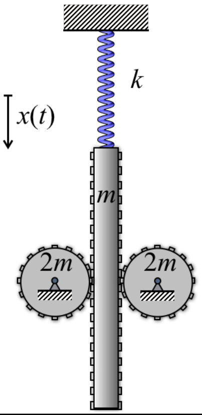
där d är maximala inträngningsdjupet, dvs

$$-\tfrac{1}{2} m v_0^2 = -\tfrac{1}{2} \frac{F_0\, d^2}{s_0} \qquad \Rightarrow \qquad d = (\pm) \sqrt{\frac{m v_0^2 s_0}{F_0}}$$

Svar: $\sqrt{\frac{m v_0^2 s_0}{F_0}}$

■

6.



En homogen stång av massan m är upphängd i taket medelst en linjär fjäder, med fjäderkonstant k. Två homogena cirkulära cylindrar, vardera av massan $2m$ och radien r kan rotera kring var sin fixa, friktionsfria axel. Stången kan inte glida mot de båda cylindrarna. (De kuggar i varandra som figuren antyder.)

Bestäm systemets egenvinkelfrekvens ω_0. [5p]

Ställ för enkelhets skull upp den totala mekaniska energin $E = T + V$:

$V = \frac{1}{2}k\,x^2 - mgx$ (Potentiella energin för fjäderkraften plus dito för tyngdkraften på stången.)

$T = \frac{1}{2}m\,\dot{x}^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\bar{I}\left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2$ (Kinetiska energin från stångens translationsrörelse i vertikalled plus kinetiska energin för två homogena cylindrar som roterar kring var sin tyngdpunktsaxel.)

$\bar{I} = \frac{1}{2}(2m)\,r^2$

Alltså: $E = T + V = \frac{3}{2}m\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k\,x^2 - mgx = \frac{3}{2}m\left(\dot{x}^2 + \frac{k}{3m}x^2 - \frac{2}{3}gx\right)$

E är konstant i tiden (ty inga icke-konservativa krafter), så

$$0 = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{3}{2}m\cdot 2\dot{x}\left(\ddot{x} + \frac{k}{3m}x - \frac{1}{3}g\right)$$

Differentialekvationen för svängningen är alltså

$$\ddot{x} + \frac{k}{3m}x = \frac{1}{3}g$$

(Högerledet pga att vi valt att räkna från fjäderns ospända läge.) Egenfrekvensen får vi alltså som

SVAR: $\sqrt{\frac{k}{3m}}$

■