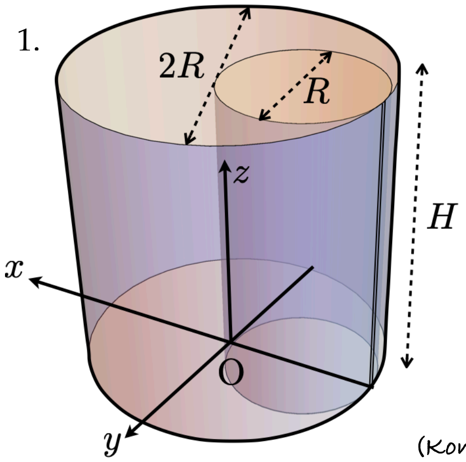
1. 

Ur en homogen cirkulär cylinder med höjd H och radien R har man borrat ett cirkulärcylindriskt hål med radien R/2 som figuren antyder. I figuren finns angivet ett koordinatsystem Oxyz med origo i centrum av den ursprungliga cylinderns bottenyta. Bestäm masscentrums koordinater i koordinatsystemet Oxyz! [5p]

(Kontrollfråga: Svarar du med masscentrums koordinater i rätt system?)

Symmetri m.a.p. xz-planet ger att $\overline{y} = 0$.

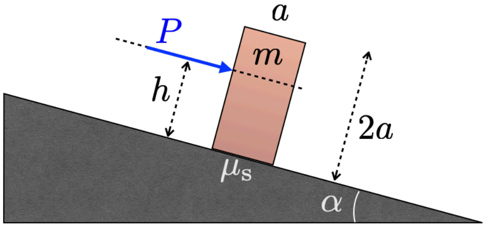
Symmetri m.a.p. planet $z = H/2$ ger att $\overline{z} = \frac{1}{2}H$.

Beteckna den ursprungliga cylindern som kropp ①, och den borttagna cylindern som kropp ②. Då är $\overline{x}_{①} = 0$, $\overline{x}_{②} = -\frac{1}{2}R$. Vidare är $V_{①} = \pi R^2 H$, $V_{②} = \pi \left(\frac{1}{2}R\right)^2 H$.

$$\overline{x} = \frac{V_{①}\overline{x}_{①} - V_{②}\overline{x}_{②}}{V_{①} - V_{②}} = \frac{1}{6}R$$

■

2.



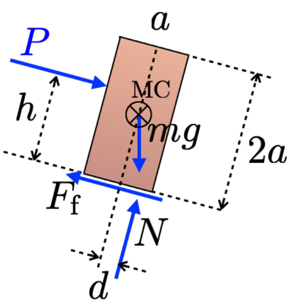
Kapten Obsolet håller på att knuffa sitt nya kylskåp (rosa, av märket SMUG) nedför ett sluttande plan; se figuren! Kylskåpets masscentrum ligger i dess geometriska centrum.

Givet lutningsvinkeln α, kylskåpets massa m, dess höjd $2a$ och bredd a, samt friktionskoefficienten μ_s mellan kylskåp och plan:

a) Bestäm hur stor kraft P Kapten måste knuffa med för att kylskåpet skall börja glida. [3p]

b) Bestäm hur långt från planet verkningslinjen för P högst får gå om kylskåpet inte skall välta innan det börjar glida! (h i figuren.) [2p]

[Det räcker för full poäng att ställa upp rätt ekvationer varur P och h kan beräknas. Ingen algebraisk machismo alltså! Kom ihåg att alla ekvationer skall motiveras!]



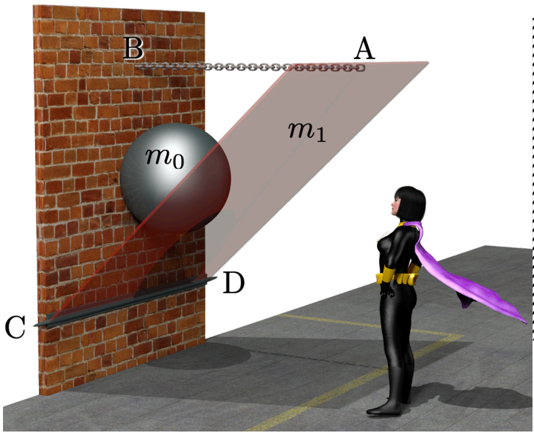
Frilägg kylskåpet! Ställ upp jämviktsekvationerna för fallet då kylskåpet är på gränsen till glidning:

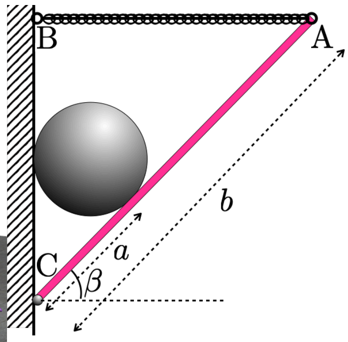
$$
\left\{
\begin{array}{rrr}
\nearrow: & N - mg\cos\alpha = 0 & (1) \\
\searrow: & P + mg\sin\alpha - F_f = 0 & (2) \\
\overset{\curvearrowright}{\mathrm{MC}}: & P\cdot(h-a) + F_f\cdot a - N\cdot d = 0 & (3) \\
\text{På gränsen till glidning}: & F_f = \mu_s N & (4)
\end{array}
\right.
$$

a) För att bestämma P på gränsen till glidning använder vi (1), (2) och (4). De utgör tre ekvationer för de tre obekanta F_f, N och P!

b) Som figuren visar måste $d \le a/2$. (Annars måste kylskåpet ha stödben!) Vid likhet är kylskåpet precis på gränsen till att välta! Sätt alltså $d = a/2$ i (3), tillsammans med de F_f, N och P som du bestämde i a). Lös ut h! Det ger dig det högsta tillåtna h. ■

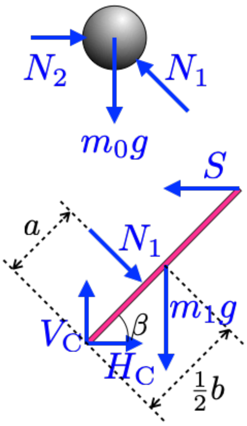
3. Bestäm storleken av linkraften i den lätta, otänjbara horisontella kedjan AB, vinkelrät mot den vertikala väggen i figuren. A är mitt på den armerade rektangulära glasskivans övre kant. Det _glatta_ klotet, placerat symmetriskt rakt under kedjan, har massan m_0; glasskivan har massan m_1. Det horisontella gångjärnet CD är friktionsfritt.





Relevanta mått framgår av figurerna. Observera: det räcker att ställa upp "lagom många" jämviktsekvationer för att linkraften skall kunna lösas ut. Du behöver inte _lösa_ ekvationssystemet! [5p]

[Lägg din energi på att ställa upp rätt ekvationer!]



Frilägg de två stelkropparna var för sig. Eftersom **klotet** är glatt, dvs friktionsfritt, kommer verkningslinjerna för krafterna N_1 och N_2 att gå genom klotets centrum, så momentjämvikt för klotet är automatiskt uppfyllt. Återstår två av (de 2D) jämviktsekvationerna:

$$\begin{cases} \rightarrow: & N_2 - N_1 \sin\beta = 0 \quad (1) \\ \uparrow: & N_1 \cos\beta - m_0 g = 0 \quad (2) \end{cases}$$

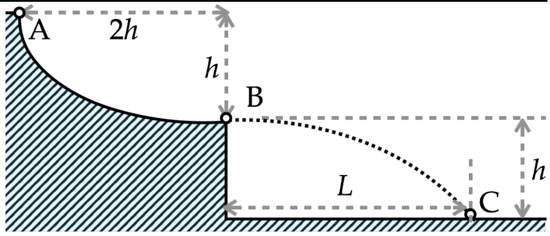
Sedan ställer vi upp de tre (2D) jämviktsekvationerna för **skivan**:

$$\begin{cases} \rightarrow: & H_C + N_1 \sin\beta - S = 0 \quad (3) \\ \uparrow: & V_C - N_1 \cos\beta - m_1 g = 0 \quad (4) \\ \overset{\frown}{C}: & N_1 a + m_1 g \tfrac{1}{2} b \cos\beta - S b \sin\beta = 0 \quad (5) \end{cases}$$

Detta är fem oberoende ekvationer för de fem obekanta S, N_1, N_2, V_C, H_C. Alltså kan vi lösa ut S! ■

PS. Som man säger: man lär så länge man har elever! Flera tentander insåg omedelbart att man bara behöver ställa upp två ekvationer för att lösa uppgiften! Det är ekv. (2) och ekv. (5) ovan! Jag tror att ni kommer att klara er bra i livet! 👏

4. En partikel med massan m släpps från vila i punkten A i figuren, och glider längs en glatt kvarts-elliptisk rutschkana (halvaxlar h och $2h$ enligt figuren). I B flyger partikeln rakt ut i horisontell riktning och faller sedan fritt. Den landar i punkten C. Bestäm sträckan L! (Se figuren.) [5p]



Mellan A och B bevaras den totala mekaniska energin för partikeln, så om vi sätter nollnivån för den potentiella energin i tyngdkraftfältet på samma höjd som B har vi

$$mgh = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{B}}^2 \quad \Rightarrow \quad v_{\mathrm{B}} = \sqrt{2gh}$$

Under det fria fallet uppfyller partikelns koordinater i ett koordinatsystem Bxy (med x horisontell, pos. åt höger)

$$\begin{cases} m\,\ddot{x}(t) = 0 \\ m\,\ddot{y}(t) = -g \end{cases}$$

där vi satt $t = 0$ i det ögonblick partikeln passerar B. Integrera två gånger m.a.p. tiden:

$$\begin{cases} x(t) = v_{\mathrm{B}} t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

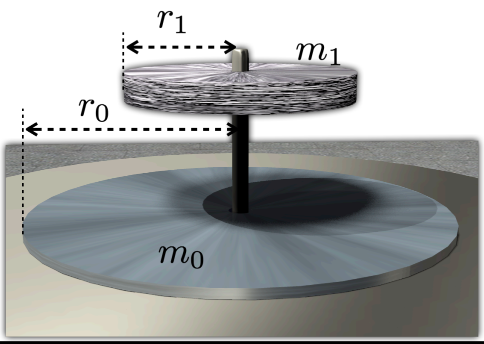
där vi har använt begynnelsevillkoren $x(0) = 0,\ y(0) = 0,\ \dot{x}(0) = v_{\mathrm{B}},\ \dot{y}(0) = 0.$

Om partikeln landar i C vid tiden t_{C} har vi

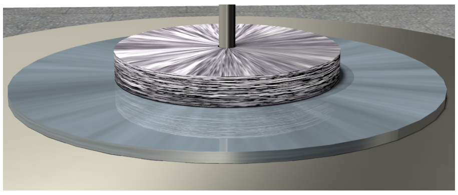
$$-\frac{1}{2}gt_{\mathrm{C}}^2 = y(t_{\mathrm{C}}) = -h \quad \Rightarrow \quad t_{\mathrm{C}} = \sqrt{2\frac{h}{g}} \quad \Rightarrow \quad L = x(t_{\mathrm{C}}) = v_{\mathrm{B}}\, t_{\mathrm{C}} = \sqrt{2gh}\sqrt{2\frac{h}{g}} = 2h$$

så svaret är $L = 2h$. ■

5. En homogen skiva med radien r_0 och massan m_0 vilar på ett glatt horisontalplan. Skivan kan rotera friktionsfritt kring en vertikal axel som sticker upp ur planet. Initialt är skivan i vila. En annan skiva, med massan m_1 och radien r_1, roterar kring axeln med vinkelhastigheten ω_1. Den senare skivan släpps ned på den första skivan.

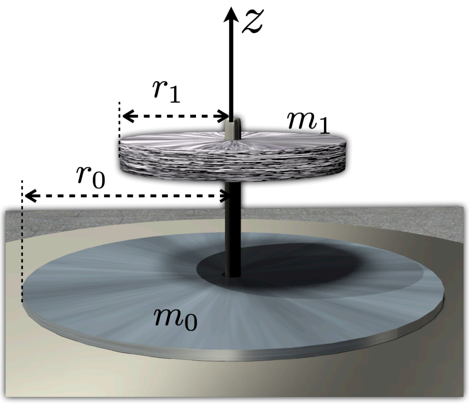


Mellan skivorna råder friktion, och efter en stund snurrar därför båda skivorna med en och samma vinkelhastighet ω. Bestäm denna vinkelhastighet!



[5p]

Inför en vertikal z-axel enligt figuren.



Innan släppet sker är rörelsemängdsmomentets z-komponent för systemet av två skivor

$$L_{z,\text{före}} = I_{z,1}\omega_1$$

där $I_{z,1} = \frac{1}{2}m_1 r_1^2$.

Efter släppet, när skivorna till slut rör sig med samma vinkelhastighet ω, så är rörelsemängdsmomentet m.a.p. z-axeln

$$L_{z,\text{efter en stund}} = I_{z,1}\,\omega + I_{z,0}\,\omega$$

där $I_{z,0} = \frac{1}{2}m_0 r_0^2$.

Inga yttre kraftmoment m.a.p. z-axeln verkar på systemet av kroppar. Alltså är rörelsemängdsmomentet m.a.p. z-axeln bevarad, och vi får

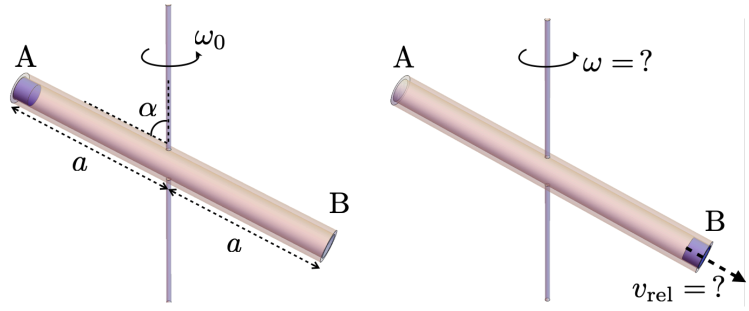
$$\omega = \frac{I_{z,1}}{I_{z,1} + I_{z,0}}\,\omega_1 = \frac{\frac{1}{2}m_1 r_1^2}{\frac{1}{2}m_1 r_1^2 + \frac{1}{2}m_0 r_0^2}\,\omega_1 = \boxed{\frac{m_1 r_1^2}{m_1 r_1^2 + m_0 r_0^2}\,\omega_1}$$

■

6. Ett rör av längden $2a$ är fäst i en vertikal axel som figuren visar. Röret lutar en vinkel α gentemot vertikalriktningen, och har masströghetsmomentet I m.a.p. den vertikala axeln. I röret kan en liten kropp med massan m glida friktionsfritt. Röret sätts i rotation kring axeln med en start-vinkelhastighet ω_0, och snurrar sedan momentfritt kring axeln. Den initiala vinkelhastigheten är inte större än att den lilla kroppen som startar i A börjar glida neråt i röret.

a) När den lilla kroppen når rörets nedre ände, B, vad är rörets vinkelhastighet? [2p]

b) När den lilla kroppen når rörets nedre ände, vad är dess hastighet relativt röret? [3p]



Inga yttre kraftmoment m.a.p. den vertikala axeln, så systemets (rör + liten kropp) rörelsemängdsmoment m.a.p. axeln är bevarat. Jämför vi rörelsemängdsmomentet i första och andra bilden ser vi då lätt att $\omega = \omega_0$! Alltså samma vinkelhastighet i andra bilden som i den första!

Inga yttre krafter eller moment förutom tyngdkraften uträttar något arbete på systemet. Tyngdkraften är som bekant konservativ, så vi har $\Delta T + \Delta V = 0$. Eftersom enligt a)-uppgiften vinkelhastigheten är densamma i början som i slutet, så är

$$\Delta T = \tfrac{1}{2} m v_{\text{rel}}^2 .$$

Vad den potentiella energin beträffar är

$$\Delta V = -mg \cdot (2a \cos\alpha)$$

så sammantaget fås $v_{\text{rel}} = 2\sqrt{ga \cos\alpha}$.