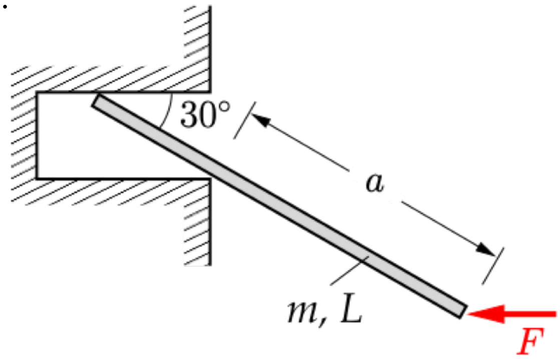
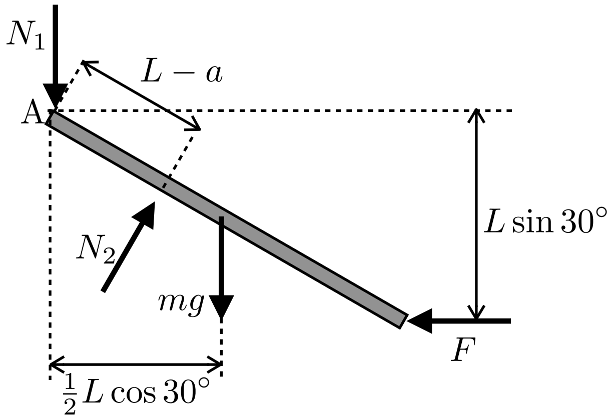
1.



En stel slank balk av massan m och längden L hålls med hjälp av en horisontell kraft av storlek F på plats i den position som figuren visar. (Lodriktningen är nedåt i figuren.) Bestäm hur stor F måste vara för jämvikt. Bortse från all friktion.

Frilägg balken.



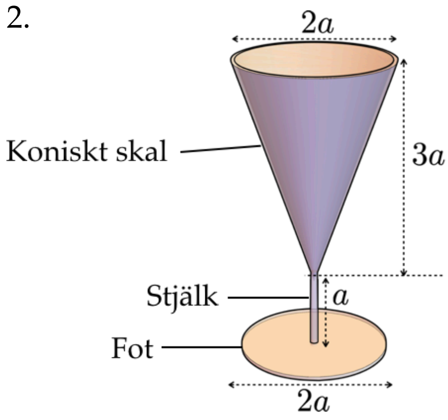
Jämviktsekvationer:

$$
\begin{cases}
\uparrow: & N_2 \cos 30° - N_1 - mg = 0 \quad (1) \\
\rightarrow: & N_2 \sin 30° - F = 0 \quad (2) \\
\overset{\frown}{\text{A}}: & F \cdot L \sin 30° - N_2 \cdot (L - a) + mg \cdot \tfrac{1}{2} L \cos 30° = 0 \quad (3)
\end{cases}
$$

$\Rightarrow$ Svar: $F = \dfrac{\sqrt{3}\, L}{6L - 8a} mg$

■

2.



På en bordskiva står ett nubbeglas av mycket tunt glas, med mått enligt figuren. Det består av ett koniskt skal, en "stjälk" och en fot. Stjälkens massa kan försummas, men foten och skalet består av likadant tunt homogent glas med en konstant ytdensitet σ.
Bestäm hur högt över bordsskivan nubbeglasets masscentrum ligger! (Glaset är lyckligtvis tomt.)

[Ledning: Arean av konens mantelyta är $\frac{1}{2} \cdot 2\pi a \cdot \ell$ där $\ell = \sqrt{a^2 + (3a)^2}$.]

$$\bar{z}_{\text{skal}} = \text{stjälkens längd} + \frac{2}{3} \cdot \text{konens höjd} = a + \frac{2}{3} \cdot 3a = 3a$$

$$\bar{z}_{\text{fot}} = 0$$

$$A_{\text{skal}} = \sqrt{10}\,\pi a^2$$

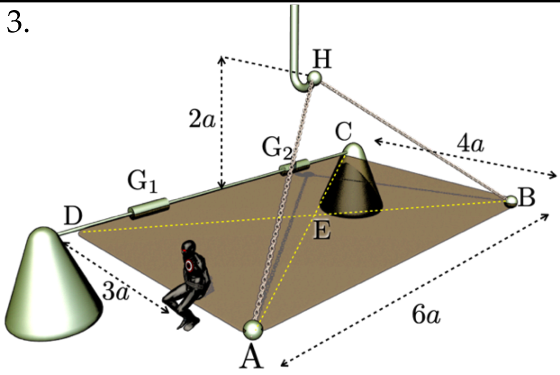
$$A_{\text{fot}} = \pi a^2$$

$$\bar{z}_{\text{glaset}} = \frac{\bar{z}_{\text{skal}} A_{\text{skal}} + \bar{z}_{\text{fot}} A_{\text{fot}}}{A_{\text{skal}} + A_{\text{fot}}} = \frac{3\sqrt{10}}{1+\sqrt{10}}\,a \approx 2.3\,a$$

Svar: $\frac{3\sqrt{10}}{1+\sqrt{10}}\,a$

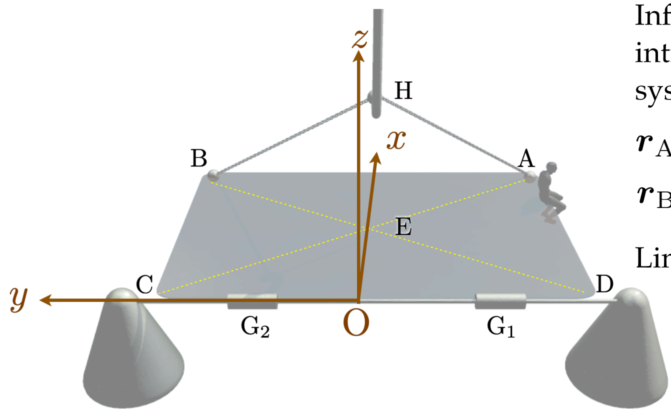
■

3.



En tunn rektangulär skiva ABCD av glas, med massan m_{glas}, är fäst i två gångjärn G_1 och G_2. Gångjärnen kan båda *vrida* sig fritt kring axeln CD, men också *glida* friktionsfritt längs denna axel. Glas-skivan hålls horisontell med hjälp av två lätta kedjor AH och BH. Upphängningspunkten H är placerad *lodrätt* ovanför glasskivans mittpunkt E. På sidan AD har en trött superhjälte av massan m_{KO} satt sig. Alla mått framgår av figuren.

Bestäm storleken av linkrafterna i kedjorna AH och BH.



Inför koordinaterna x, y, z enligt figuren härintill. Då är lägevektorerna från koordinatsystemets origo

$$\boldsymbol{r}_{\text{A}} = (4a, -3a, 0) \qquad \boldsymbol{r}_{\text{E}} = (2a, 0, 0)$$

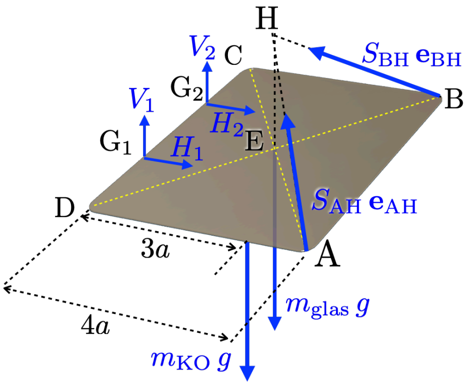
$$\boldsymbol{r}_{\text{B}} = (4a, 3a, 0) \qquad \boldsymbol{r}_{\text{H}} = (2a, 0, 2a)$$

Linkrafternas riktningsvektorer ges av

$$\mathbf{e}_{\text{AH}} = \frac{1}{|\boldsymbol{r}_{\text{H}} - \boldsymbol{r}_{\text{A}}|}(\boldsymbol{r}_{\text{H}} - \boldsymbol{r}_{\text{A}}),$$

$$\mathbf{e}_{\text{BH}} = \frac{1}{|\boldsymbol{r}_{\text{H}} - \boldsymbol{r}_{\text{B}}|}(\boldsymbol{r}_{\text{H}} - \boldsymbol{r}_{\text{B}}).$$

Frilägg glasskivan:



Vi söker endast de två obekanta linkrafternas storlekar S_{AH} och S_{BH}. Vi är alltså inte intresserade av tvångskraftskomponenterna från de glidande gångjärnen (H_1, V_1, H_2, V_2). Då behöver vi bara teckna de två oberoende jämviktsekvationer vilka inte innehåller tvångskrafterna, nämligen kraft- och momentekvationerna i y-led:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \ldots \quad \Rightarrow \qquad S_{\text{AH}} - S_{\text{BH}} = 0$$

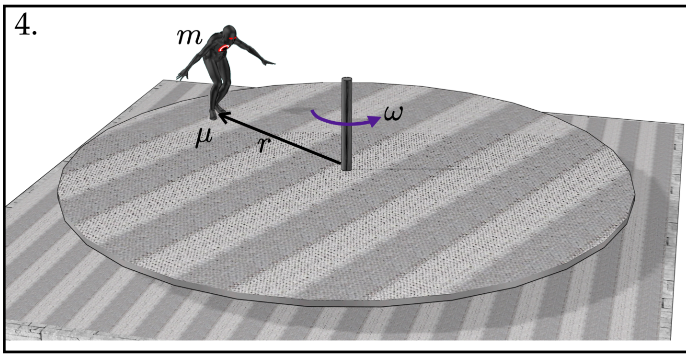
$$\Sigma M_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 3a \cdot m_{\text{KO}} g + 2a \cdot m_{\text{glas}} g - 4a \cdot \frac{2}{\sqrt{17}}(S_{\text{AH}} + S_{\text{BH}}) = 0$$

Vi har alltså två oberoende ekvationer för våra två sökta storheter. Löser vi dem får vi

Svar: $S_{\text{AH}} = S_{\text{BH}} = \dfrac{\sqrt{17}}{16}(2m_{\text{glas}} + 3m_{\text{KO}})g$

■

4.



En person med massan m står på ett strävt, roterande (konstant vinkelhastighet ω) och horisontellt golv. Friktionskoefficienten mellan personens skor och golvet är μ. Personens avstånd från golvets rotationsaxel är r. Hur stor får vinkelhastigheten högst vara för att personen inte skall börja glida?

Här utför personen cirkulär rörelse kring fix axel. Frilägg personen och ställ upp Newtons andra lag i normalled och i vertikalled, samt teckna friktionsvillkoret!

$$\Sigma F_\text{n} = m_\text{n} \quad \Rightarrow \quad F_\text{f} = m\,r\omega^2$$

$$\Sigma F_z = m a_z \quad \Rightarrow \quad N - mg = 0$$

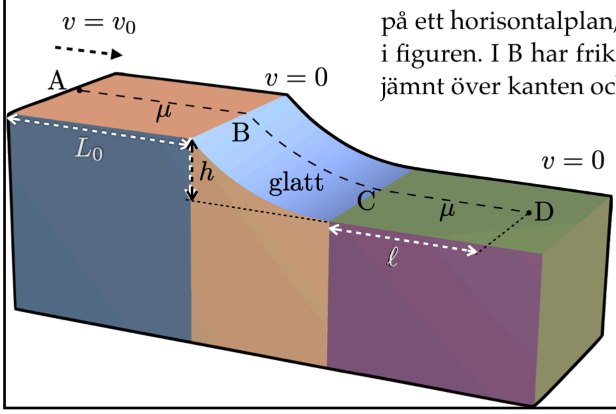
$$|F_\text{f}| \leq \mu N$$

På gränsen till glidning får vi då $\mu m g = m r \omega^2$ och alltså följande

Svar: $\omega = (\pm)\sqrt{\dfrac{\mu g}{r}}$

■

5.



En släde med massan m startar med farten v_0 i punkten A i figuren. Den färdas på ett horisontalplan, med friktions-koefficienten μ, en sträcka L_0 till punkten B i figuren. I B har friktionen bromsat dess fart till noll, men släden når nätt och jämnt över kanten och glider sedan accelererande nedför en glatt backe BC.

Från backens slut i C glider den på ett horisontalplan, också detta med friktionskoefficienten μ, till vila i punkten D.

a) Bestäm den okända friktionskoefficienten μ (2p), och
b) längden ℓ av sträckan från C till D. (3p)

A till B:Lagen för den kinetiska energin ger

$$-\mu\, mg\, L_0 = W_{\text{AB}} = \Delta T = \tfrac{1}{2}m\; 0^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 \quad\Rightarrow\quad \mu = \frac{v_0^2}{2g\, L_0}.$$

B till C: Om farten i C är v_{C}, så ger energilagen

$$\Delta(T+V) = 0 \quad\Rightarrow\quad \tfrac{1}{2}mv_{\text{C}}^2 - \tfrac{1}{2}m\, 0^2 + mg\, 0 - mgh = 0 \quad\Rightarrow\quad \tfrac{1}{2}mv_{\text{C}}^2 = mgh.$$

C till D: Lagen för den kinetiska energin ger

$$-\mu\, mg\, \ell = W_{\text{CD}} = \Delta T = \tfrac{1}{2}0^2 - \tfrac{1}{2}mv_{\text{C}}^2 = -mgh \quad\Rightarrow\quad \ell = \frac{h}{\mu} = \frac{2g\, L_0\, h}{v_0^2}.$$

Svar: $a) \quad \mu = \frac{v_0^2}{2g\, L_0},$

$b) \quad \ell = \frac{h}{\mu} = \frac{2g\, L_0\, h}{v_0^2}.$

■

6.

En våghalsig kanondrottning (med initialerna BGJ) med massan m skjuts en vindstilla dag rakt uppåt i atmosfären, med begynnelsefarten v_0. Rörelsemotståndet vid rörelse genom atmosfären har beloppet $D = C_2\,v^2 + C_1\,|v|$, där C_1 och C_2 är konstanter, och v är hastigheten relativt luften. Hur lång tid tar det innan kanondrottningens hastighet relativt luften är noll? Det går bra att svara med ett integraluttryck (bara det är *rätt* integral)!

Frilägg kanondrottningen och teckna NII i vertikalled (pos. uppåt). Sedan vevar vi igång separatorn!

$$-m\,g - C_1\,v - C_2\,v^2 = m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{d}t = -\frac{m}{(m\,g + C_1\,v + C_2\,v^2)}\mathrm{d}v$$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^{t_0}\mathrm{d}t = -\int_{v_0}^{0}\frac{m}{(m\,g + C_1\,v + C_2\,v^2)}\mathrm{d}v$$

$$\Downarrow$$

$$t_0 = \int_0^{v_0}\frac{m}{(m\,g + C_1\,v + C_2\,v^2)}\mathrm{d}v$$

Svar:

$$\int_0^{v_0}\frac{m}{(m\,g + C_1\,v + C_2\,v^2)}\mathrm{d}v$$

■