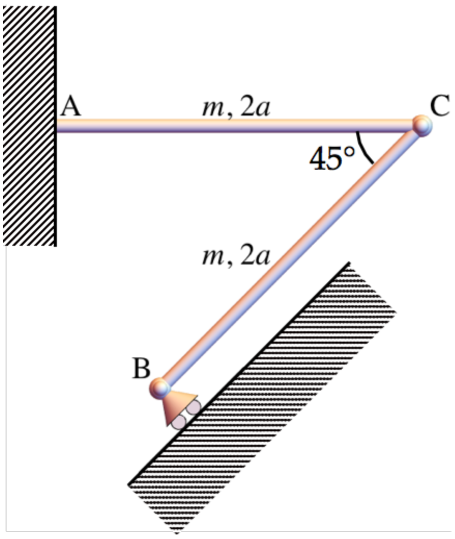
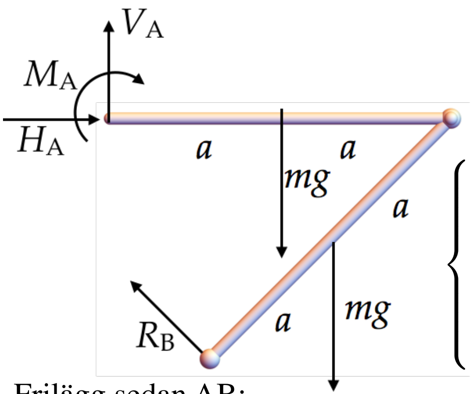
Lösningsförslag till TENTAMEN TME011 Mekanik 2016-08-15

1.



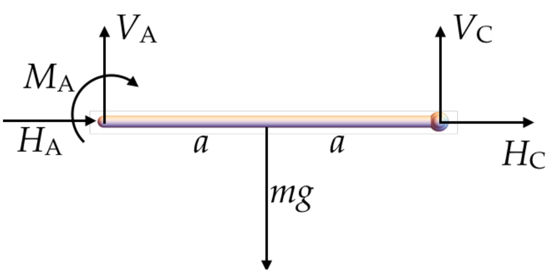
Två stela balkar AC och BC, vardera av massan m, är momentfritt förbundna med varandra i C. AC och BC är vardera av längden $2a$. AC är i änden A fast inspänd i en vägg. BC är i punkten B momentfritt fäst i en liten vagn som rör sig friktionsfritt längs en annan, sluttande, vägg. Bestäm stödreaktionerna (krafter och ev. moment) i punkterna A (3p) och B (2p).

Frilägg först hela ACB:



$$
\begin{cases}
\uparrow: & V_A + \frac{1}{\sqrt{2}} R_B - 2mg = 0 \quad (1) \\
\rightarrow: & H_A - \frac{1}{\sqrt{2}} R_B = 0 \quad (2) \\
\overset{\frown}{C}: & -M_A - V_A \cdot 2a - R_B \cdot 2a + mg\,a + \frac{1}{\sqrt{2}} mg\,a = 0 \quad (3)
\end{cases}
$$

Frilägg sedan AB:

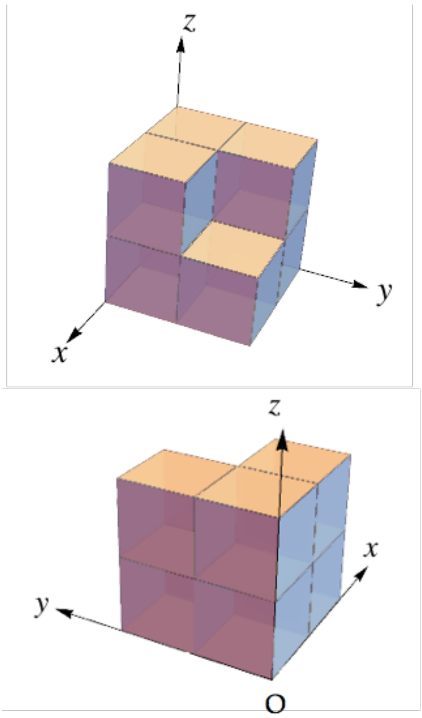


$$
\begin{cases}
\uparrow: & V_A + V_C - mg = 0 \quad (4) \\
\rightarrow: & H_A + H_C = 0 \quad (5) \\
\overset{\frown}{C}: & -M_A - V_A \cdot 2a + mg\,a = 0 \quad (6)
\end{cases}
$$

Sex linjära och oberoende ekvationer för de sex obekanta $V_A, H_A, M_A, R_B, V_C, H_C$. Löses på valfritt vis! *Med de referensriktningar som anges i figurerna ovan* så har vi följande

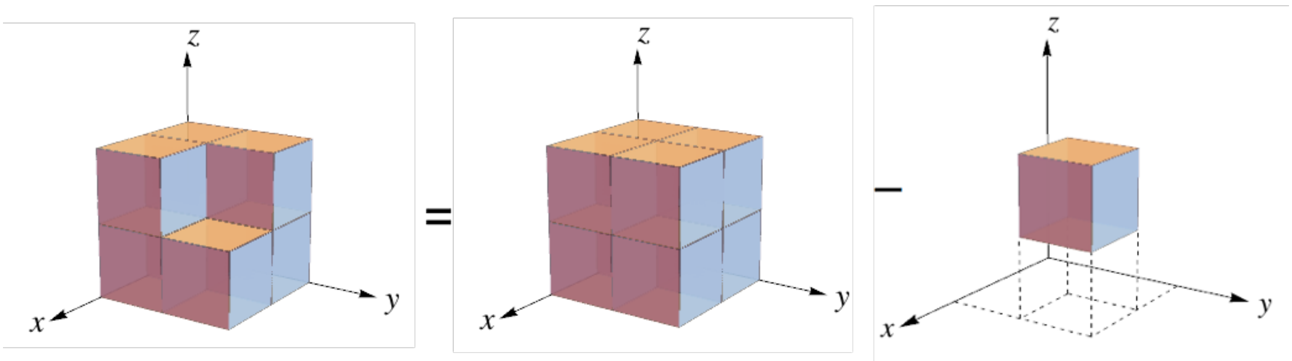
$$
\text{SVAR:} \quad V_A = \frac{7mg}{4}, \quad H_A = \frac{mg}{4}, \quad M_A = -\frac{5\mathrm{mg\,a}}{2}, \quad R_B = \frac{\mathrm{mg}}{2\sqrt{2}}.
$$

(V_C och H_C efterfrågas ej, och behöver inte vara med i svaret.) ■

2. 

Sju stycken homogena kuber, vardera med sidan *a* och massan *m*, limmas ihop på det sätt som visas i figurerna härintill. Bestäm masscentrums läge (x-, y- och z-koordinaterna i det system Oxyz som visas i figurerna) för den sammansatta kroppen. (5p)

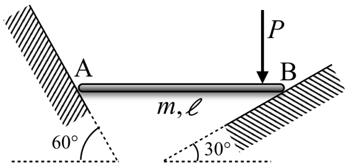
Betrakta kroppen som bestående av en stor kub med sidan $2a$ och massan $8m$, från vilken en liten kub med sidan a och massan m har tagits bort:



$$\bar{x} = \frac{1}{8m - m}\left(8m \cdot a - m \cdot \frac{3}{2}a\right) = \frac{13}{14}a$$

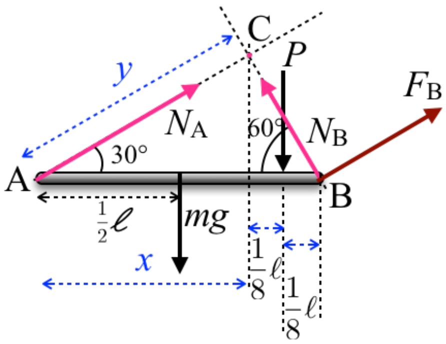
Symmetri ger att $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}$. Alltså får vi:

$$\boxed{\text{SVAR:} \quad \bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = \frac{13}{14}a \ .}$$

3. 

En stel planka AB, med massan m och längden ℓ, vilar i ett horisontellt läge mellan två sluttande tak. I A är kontakten mellan planka och tak väsentligen friktionsfri, medan den i B har friktionskoefficienten μ. En person med massan $4m$ ställer sig på plankan en åttondedel av plankans längd från änden B. Bestäm hur stor friktionskoefficienten μ minst måste vara för att jämvikt verkligen skall vara möjlig i den angivna situationen. (5p)

Frilägg plankan, och inför punkten C enligt figuren nedan. Inför normalkrafterna N_A, N_B i A resp. B, samt friktionskraften F_B i B. Bestäm också längderna x och y i figuren.



$$x = y\cos 30^\circ \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{3}{4}\ell$$
$$y = \ell \cos 30^\circ$$

Ställ upp jämviktsekvationer för plankan:

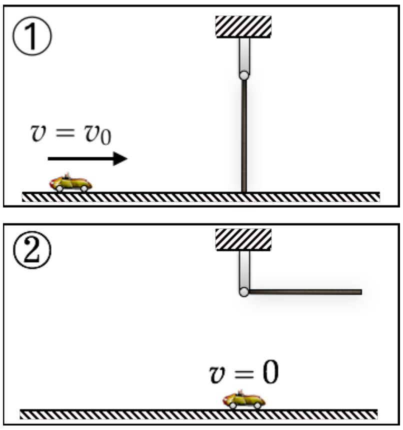
$$\begin{cases} \curvearrowleft C: & mg\frac{\ell}{4} - 4mg\frac{\ell}{8} + F_B\frac{\ell}{2} = 0 & (1) \\ \nwarrow: & N_B - \frac{\sqrt{3}}{2}mg - \frac{\sqrt{3}}{2}4mg = 0 & (2) \\ \nearrow: & N_A - \frac{1}{2}mg - \frac{1}{2}4mg + F_B = 0 & (3) \end{cases}$$

Detta är tre oberoende ekvationer för de tre obekanta F_B, N_B, N_A. Från friktionsvillkoret och (1) och (2) får vi följande

$$\boxed{\text{SVAR:} \quad \mu \geq \left|\frac{F_B}{N_B}\right| = \frac{1}{5\sqrt{3}}\ .}$$

(Vi måste också kolla att normalkrafterna är riktade bort från taken, men detta är lätt att övertyga sig om.) ■

4.



① Vid blixthalka kommer en liten bil av massan m_0 i friktionsfri glidning på en horisontell vägbana. Bilen glider med farten v_0 fram mot en port, vilken medelst momentfria gångjärn hänger från en balk i taket (se figuren).

② Porten är väsentligen en tunn kvadratisk plåt med sidan a och massan m_1. När bilen kolliderar med porten slår porten upp och når nätt och jämnt horisontellt läge innan den vänder. Bilen stannar upp helt i och med kollisionen mot porten.

Bilen kan i detta sammanhang anses punktformig. Bestäm kvoten m_1/m_0. (5 p)

Vilken storhet bevaras under själva kollisionen? Jo rörelsemängdsmomentet för hela systemet bil + port med avseende på axeln genom gångjärnen. Låt A vara en punkt på axeln. Omedelbart före och omedelbart efter krocken har vi:

Rörelsemängdsmomentet före krock: $L_{\mathrm{A}}^{\text{före}} = m_0 v_0 a$ (från bilen!)

Rörelsemängdsmomentet efter krock: $L_{\mathrm{A}}^{\text{efter}} = I_{\mathrm{A}}\omega_1 = \{\text{se FS}\} = \frac{1}{3} m_1 a^2 \omega_1$ (från porten!)

Här är ω_1 portens vinkelhastighet i rörelsen kring A alldeles efter krocken. Vi får alltså:

$$m_0 v_0 a = L_{\mathrm{A}}^{\text{före}} = L_{\mathrm{A}}^{\text{efter}} = \frac{1}{3} m_1 a^2 \omega_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{m_1}{m_0} = \frac{3 v_0}{a\,\omega_1} \quad \text{(i)}$$

Vad är då ω_1? Under den efterföljande rörelsen bevaras den totala mekaniska energin för porten. Om vi sätter portens potentiella energi i tyngdkraftfältet till noll i utgångsläget har vi:

$$(T+V)_{\text{omedelbart efter krocken}} = \frac{1}{2} I_{\mathrm{A}} \omega_1^2 + 0$$

$$(T+V)_{\text{porten horisontell}} = 0 + m_1 g \frac{a}{2}$$

Alltså: $$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} m_1 a^2\right)\omega_1^2 = \frac{1}{2} m_1 g a \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = (\pm)\sqrt{\frac{3g}{a}} \quad \text{(ii)}$$

Från (i) och (ii) får vi då

$$\boxed{\text{SVAR:} \quad \frac{m_1}{m_0} = \frac{\sqrt{3}\,v_0}{\sqrt{g\,a}}}$$

∎

5.

Vid en cirkusföreställning skjuts den mänskliga kanonkulan Berit Granath-Jansson rakt uppåt med utgångsfarten v_0. Låt v_z vara z-komponenten av Berits hastighetsvektor, där vi låter z-axeln peka lodrätt uppåt och sätter $z = 0$ vid hennes starthöjd.

Berits massa är m. Tyngdkraftsaccelerationen är g.

Luftmotståndet som Berit möter är en kraft, som är av storleken $C_2 v_z^2 + C_1|v_z|$ och motriktad hennes hastighetsvektor. C_1 och C_2 är positiva konstanter.

Bestäm den maximala höjd $z_{\max}$ som Berit når under sin färd. (5p)

[*Det kan vara tillräckligt att svara med ett integral-uttryck!*]

Så länge Berit rör sig uppåt är luftmotståndet riktat nedåt, och vi har

$$\text{NII} \quad \uparrow: \qquad -mg - C_2 v_z^2 - C_1 v_z = m\dot{v}_z$$

dvs, med en omskrivning m.h.a. kedjeregeln:

$$-(mg + C_1 v_z + C_2 v_z^2) = m v_z \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}z}$$

Vid $z = z_{\max}$ är $v_z = 0$, så

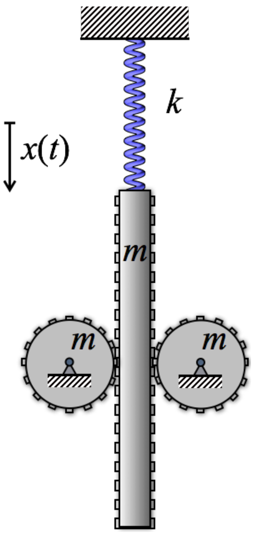
$$\int_0^{z_{\max}} \mathrm{d}z = -\int_{v_0}^{0} \frac{m v_z}{mg + C_1 v_z + C_2 v_z^2}\,\mathrm{d}v_z = \int_0^{v_0} \frac{m v_z}{mg + C_1 v_z + C_2 v_z^2}\,\mathrm{d}v_z$$

Alltså har vi följande

$$\boxed{\text{SVAR:} \quad z_{\max} = \int_0^{v_0} \frac{m v_z}{mg + C_1 v_z + C_2 v_z^2}\,\mathrm{d}v_z}$$

■

6.



En homogen stång av massan m är upphängd i taket medelst en linjär fjäder, med fjäderkonstant k. Två homogen cirkulär cylindrar, vardera av massan m och radien r kan rotera kring var sin sin fixa, friktionsfria axel. Stången kan inte glida mot de båda cylindrarna. (De kuggar i varandra som figuren antyder.)
Bestäm systemets egenvinkelfrekvens ω. (5p)

[Du får själv välja om du mäter $x(t)$ från det läge där fjädern är ospänd eller från jämviktsläget för systemet, eller från någon annan nollpunkt.]

Ställ för enkelhets skull upp den totala mekaniska energin $E = T + V$:

$$V(x) = \frac{1}{2}k\,x^2 + m\,g\,(-x)$$

(Potentiella energin för fjäderkraften plus dito för tyngdkraften på stången.)

$$\begin{aligned} T(\dot{x}) &= \frac{1}{2}m\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}m\,\dot{x}^2 + 2\left(\frac{1}{2}m\,r^2\right)\left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2 \\ &= \frac{3}{2}m\,\dot{x}^2 \end{aligned}$$

(Kinetiska energin från stångens translationsrörelse i vertikalled plus kinetiska energin för två homogena cylindrar som roterar kring var sin tyngdpunktsaxel.)

så $E = \frac{1}{2}k\,x(t)^2 - m\,g\,x(t) + \frac{3}{2}m\,\dot{x}(t)^2$.

E är konstant i tiden (ty inga icke-konservativa krafter), så

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &= kx(t)\dot{x}(t) - m\,g\,\dot{x}(t) + 3m\dot{x}(t)\ddot{x}(t) \\ &= 3m\,\dot{x}(t)\left(\ddot{x}(t) + \frac{k}{3m}x(t) - \frac{1}{3}g\right). \end{aligned}$$

Differentialekvationen för svängningen är alltså $\ddot{x}(t) + \frac{k}{3m}x(t) = \frac{1}{3}g$. (Högerledet pga att vi valt att räkna från fjäderns ospända läge.) Egenfrekvensen får vi alltså som

SVAR: $\sqrt{\frac{k}{3m}}$

■