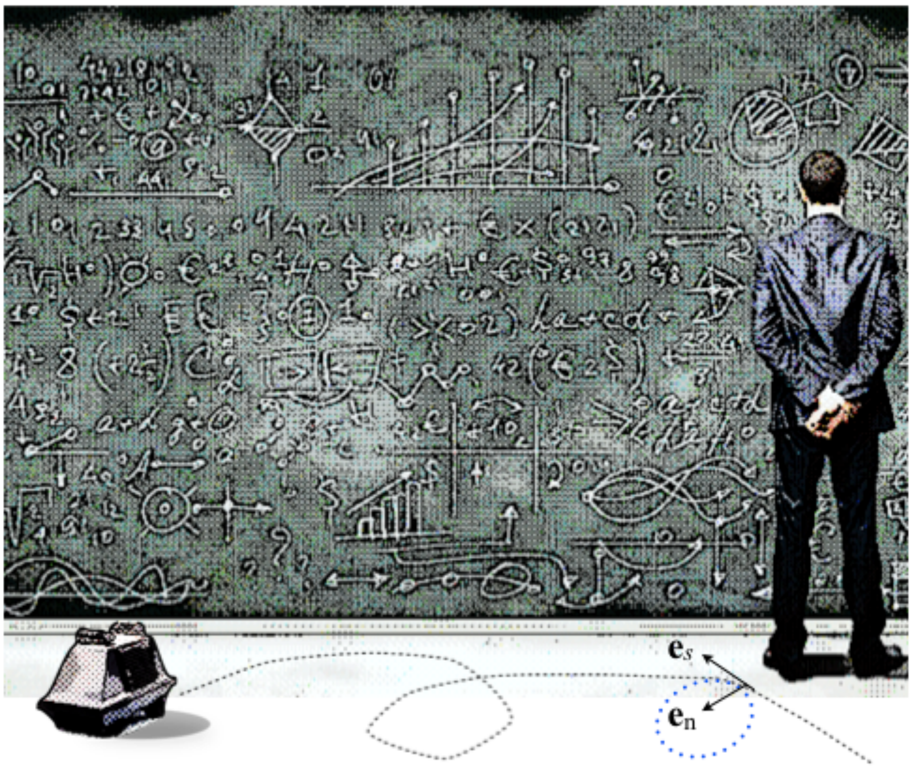
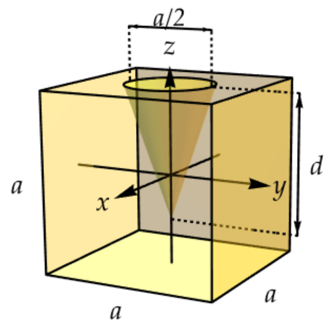
LÖSNINGSSKISSER
till
TENTAMEN TME011 Mekanik, 2016-01-07



1.



Ur en homogen kub med massan m har ett koniskt hål borrats, se figuren här intill. (Massan är alltså m **innan** konen borrats ur!) Bestäm masscentrums koordinater för den resulterande kroppen i det koordinatsystem som ges i figuren:

a) x-koordinaten (1p)
b) y-koordinaten (1p)
c) z-koordinaten (3p).

Eftersom materialet är homogent kan vi räkna på volymer istället för massor. Den ännu icke urborrade kuben har masscentrum i origo i det angivna koordinatsystemet:

$$\bar{\boldsymbol{r}}_{\text{kub}} = (0, 0, 0)$$

Kuben har volymen $V_{\text{kub}} = a^3$. Den koniska bit som skall avlägsnas har volymen $V_{\text{kon}} = \pi\, a^2\, d/3$. Konens masscentrum ligger i

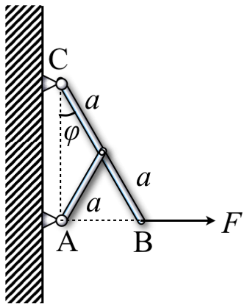
$$\bar{\boldsymbol{r}}_{\text{kon}} = \left(0, 0, \frac{a}{2} - \frac{d}{4}\right)$$

Masscentrum för den urborrade kuben är alltså

$$\bar{\boldsymbol{r}} = \frac{V_{\text{kub}}\bar{\boldsymbol{r}}_{\text{kub}} - V_{\text{kon}}\bar{\boldsymbol{r}}_{\text{kon}}}{V_{\text{kub}} - V_{\text{kon}}} = \left(0, 0, \frac{\pi d(d-2a)}{192a - 4\pi d}\right)$$

Svar: a) 0, b) 0, c) $\dfrac{\pi d(d-2a)}{192a - 4\pi d}$.

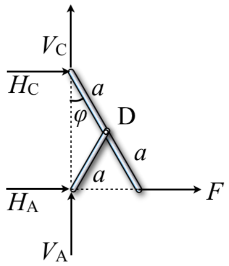
■

2. 

Två lätta balkar är sammanfogade med en momentfri led mitt på den ena balken, som figuren antyder. I A och C är stängerna fästa vid en orörlig vägg m h a momentfria leder. I B angriper en horisontell kraft riktad rakt ut från väggen.

Bestäm den horisontella och den vertikala reaktionskraften på stången BC i infästningspunkten C. (5 p)

Frilägg hela systemet av balkar:

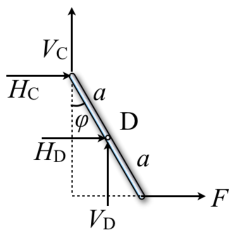


$$\begin{cases} \rightarrow: & H_A + H_C + F = 0 \quad (1) \\ \uparrow: & V_A + V_C = 0 \quad (2) \\ \overset{\curvearrowleft}{\mathrm{A}}: & -2a\cos\varphi\, H_C = 0 \quad (3) \end{cases}$$

$(3) \;\Rightarrow\; H_C = 0;\quad$ insatt i $(1) \;\Rightarrow\; H_A = -F$

$(2) \;\Rightarrow\; V_C = -V_A$

Kalla mittpunkten på BC för D. Frilägg BC:



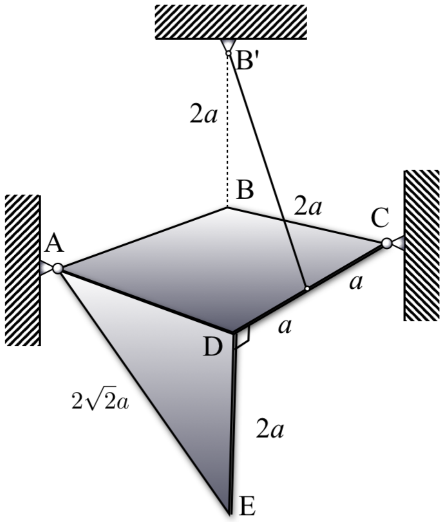
$$\overset{\curvearrowleft}{\mathrm{D}}: \quad a\cos\varphi\, F + a\sin\varphi\, V_C - a\cos\varphi\, H_C = 0 \quad (4)$$

Sätt in $H_C = 0$ i (4). Det ger
$V_C = -F\cot\varphi$

Svar: $H_C = 0$,
$V_C = -F\cot\varphi$

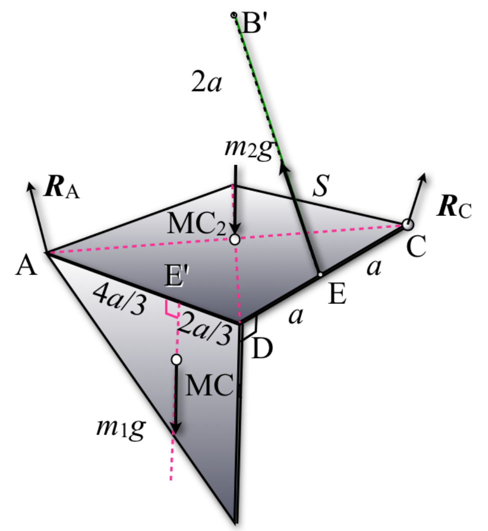
■

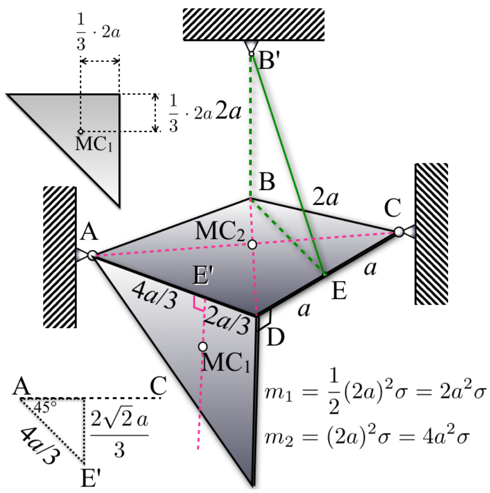
3.



Två tunna homogena plåtar, den ena (ABCD) kvadratisk, den andra (ADE) triangulär, båda av ytdensiteten σ och med mått enligt figuren, har svetsats ihop längs AD, i rät vinkel mot varandra, enligt figuren. Plåten ABCD hålls i **horisontellt** läge m h a fästen i A och C samt en lina från en punkt B' i taket till mittpunkten på sidan CD. Plåten ABCD kan rotera friktionsfritt runt axeln AC. Punkten B ligger lodrätt under B'.

Bestäm linkraftens belopp. (5 p)





Frilägg hela "plåtsystemet". Tyngdkraften på ABCD angriper i en punkt MC_2 på axeln AC och har alltså inget moment m a p AC. Tyngdkraften på den andra plåten angriper i MC_1 i figuren, och kan flyttas längs sin verkningslinje till punkten E'. Avståndet från E' till axeln AC är (se figuren nedan till vänster)

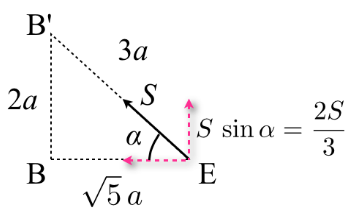
$$\frac{2\sqrt{2}\,a}{3}.$$

Linkraften S angriper i en punkt E som ligger på avståndet

$$\frac{a}{\sqrt{2}}$$

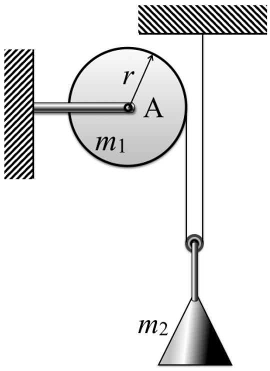
från axeln. Eftersom bara två krafter utövar något moment m a p AC ger momentjämvikt m a p AC direkt att

$$2a^2\sigma g\frac{2\sqrt{2}\,a}{3} - \frac{2S}{3}\frac{a}{\sqrt{2}} = 0$$



Svar: $S = 4\,a^2\sigma g.$

■

4. 

Anordningen härintill släpps från vila. De båda trissorna roterar friktionsfritt. Den mindre trissan kan anses vara masslös, medan den större, som är en homogen cirkulär cylinder, har massan m_1. Bestäm den **fart** varmed massan m_2 rör sig nedåt under den efterföljande rörelsen **som funktion av den sträcka** massan rört sig nedåt. (5 p)

Eftersom vi inte har några energiförluster i systemet, så kan det vara en bra idé att teckna den totala mekaniska energin hos systemet.

Kinematiskt samband: För att m_2 skall röra sig en sträcka s nedåt, måste den utrullade delan av linan öka med $2s$, dvs cylindern måste ha vridit sig en vinkel $2s/r$ kring sin axel.

Systemets potentiella energi: $V = m_2 g \cdot (-s) = -m_2 g s$

Systemets kinetiska energi:

$$T = \frac{1}{2} m_2 \dot{s}^2 + \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{1}{2} m_1 r^2\right)}_{\text{=tröghetsmoment enl FS}} \left(\frac{2\dot{s}}{r}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} (m_2 + 2m_1)\, \dot{s}^2$$

Vi har lagt potentiella energins nollnivå i startläget då $s = 0$. Den totala mekaniska energin är konstant, så

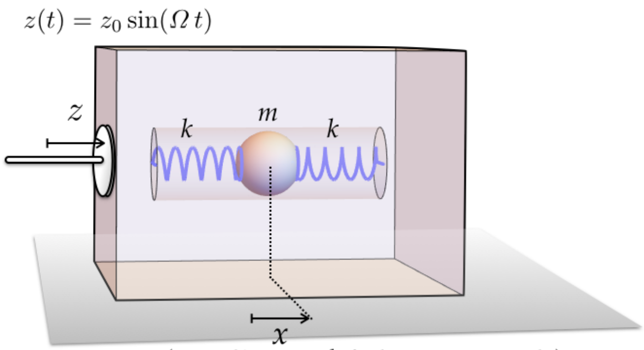
$$T + V = \frac{1}{2} (m_2 + 2m_1)\, \dot{s}^2 - m_2 g s = 0$$

Alltså har vi att farten ges av

$$|\dot{s}| = \sqrt{\frac{2m_2}{m_2 + 2m_1} g\, s}$$

villket är svaret. ∎

5.



($x = 0$ då $z = 0$ och fjädrarna är ospända)

Inne i en massiv låda finns ett cylindriskt hål, i vilket en kula av massan m kan glida så gott som friktionsfritt. Kulan är fäst med två identiska spiralfjädrar i cylinderns båda ändytor. När kulan ligger mitt i cylindern är båda fjädrarna av längden b och ospända. En pistong för hela lådan fram och tillbaka i en sinusrörelse $z(t)$ med vinkelfrekvensen Ω och amplituden z_0.

a) Bestäm en differentialekvation för kulans rörelse. (Låt $x(t)$ vara avståndet (positivt i positiv z-led, negativt i negativ z-led) för kulans mittpunkt räknat från kulans jämviktsläge för $z = 0$. Se figuren.) (3p)

b) Lång tid har gått sedan rörelsen startade. (Så att transienten har dött ut.) Bestäm $x(t)$. (2p)

Frilägg kulan och använd Newtons andra lag:

$$\text{(NII)} \quad \rightarrow: \qquad -k(x-z) - k(x-z) = m\ddot{x}$$

Alltså får vi differentialekvationen

$$\ddot{x} + \frac{2k}{m}x = \frac{2k}{m}z_0 \sin \Omega t$$

vilket är svaret på a).

Vi söker partikulärlösningen. Ansätt som vanligt

$$x_p(t) = D_1 \sin \Omega t + D_2 \cos \Omega t$$

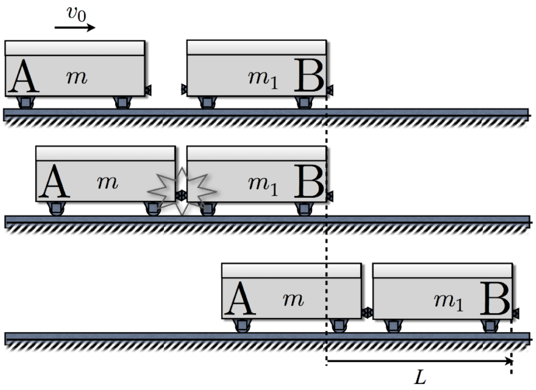
och sätt in detta i differentialekvationen från a). Samla ihop cos- och sin-termer och identifiera koefficienterna!

Svar:

$$x(t) = x_p(t) = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega^2} z_0 \sin \Omega t, \quad \text{där} \quad \omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

∎

6.



Två godsvagnar, den ena (A) med massan m, den andra (B) med massan m_1, befinner sig på samma horisontella spår. Vagnen A rullar i det närmaste friktionsfritt på spåret åt höger i figuren. Dess konstanta fart innan kollisionen är v_0. Den andra vagnen, B, står stilla på spåret till dess att A kolliderar med B. Vagnarna sammanlänkas vid kollisionen, och fortsätter tillsammans åt höger i figuren. (I kollisionsögonblicket kan man, vad vagnarna beträffar, bortse från alla krafter utom stötkraften mellan A och B.)

A fortsätter att rulla i det närmaste friktionsfritt, men omedelbart efter kollisionsögonblicket låser sig bromsarna på vagn B. Vagn B kommer alltså att glida, med en friktionskoefficient μ mellan hjul och räls. Efter att de sammanlänkade vagnarna rört sig en sträcka L at höger, har friktionen bromsat farten till 0.

Uttryck L med hjälp av övriga angivna storheter (och ev tyngdkraftaccelerationen g). (5p)

Rörelsemängden bevaras under kollisionen: $mv_0 + m_1 \cdot 0 = (m + m_1)v_{\text{efter kollision}}$

Kinetisk energi efter kollisionen: $T_{\text{efter kollision}} = \dfrac{1}{2}(m + m_1)v^2_{\text{efter kollision}}$

Kinetisk energi efter inbromsningen: $T_{\text{efter inbromsning}} = 0$

Arbetet uträttat av friktionen under inbromsningen: $W_{\text{friktion}} = -\mu m_1 g L$

Lagen om den kinetiska energin: $W_{\text{friktion}} = T_{\text{efter kollision}} - T_{\text{efter inbromsning}}$

Sammantaget får vi svaret $L = \dfrac{m^2 v_0^2}{2\mu g m_1 (m + m_1)}$

■