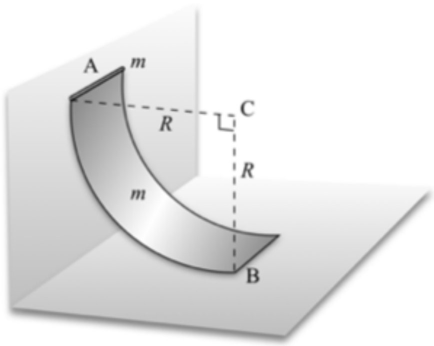
1.

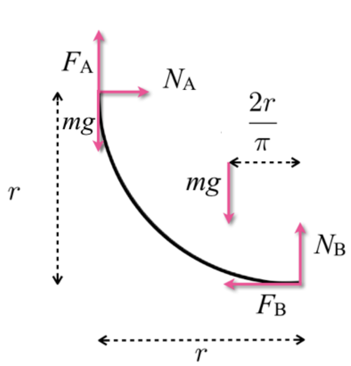


En **tunn homogen plåt** av massan m har böjts till en kvartscylindrisk yta enligt figuren. Vid dess ena raka ände (vid A) har en ***smal homogen stång***, också av massan m, fästs vid plåten. Plåten har placerats på ett strävt horisontellt golv och lutats mot en sträv vertikal vägg, så att BC i figuren är vertikal. Friktionskoefficienten vid både A och B är μ. Antag att friktionen är **fullt utvecklad** både vid kontakten med golvet och med väggen.

Bestäm en ekvation för friktionskoefficienten μ.

Ekvationen får inte innehålla några andra obekanta än μ. (Du behöver inte *lösa* ekvationen.) (5p)

Lösningsskiss: Frilägg systemet plåt + stång. Ställ upp jämvikts-ekvationer samt friktionsvillkoren för fullt utvecklad friktion:



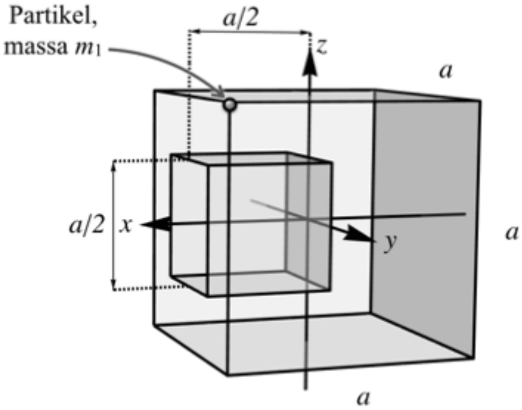
$$\begin{cases} \rightarrow: & N_A - F_B = 0 \quad (1) \\ \uparrow: & F_A - mg - mg + N_B = 0 \quad (2) \\ \overset{\frown}{B}: & mg\frac{2R}{\pi} + mgR - F_A R - N_A R = 0 \quad (3) \\ \text{Fullt utv. friktion i A}: & F_A = \mu N_A \quad (4) \\ \text{Fullt utv. friktion i B}: & F_B = \mu N_B \quad (5) \end{cases}$$

Fem ekvationer för de fem obekanta $F_A,\ N_A,\ F_B,\ N_B,\ \mu$. Eliminera alla obekanta utom μ. Dividera bort *mg* ur den resulterande ekvationen.

Svar: $\pi\left(\mu^2 + 2\mu - 1\right) = 2\left(\mu^2 + 1\right).$

■

2.



Ur en homogen kubisk kropp, med sidan a och massan m, har ett kubiskt hål med sidan $a/2$ gröpts ut, som figuren visar.

I ett hörn av kuben har också en partikel, av massan m_1, fästs.

Ett cartesiskt koordinatsystem xyz med origo i den ursprungliga kubens centrum är angivet i figuren. Bestäm *i detta system* masscentrums alla koordinater för den sammansatta kroppen (urgröpt kub + partikel). (5p)

Lösninsgskiss: Börja med att bestämma den urgröpta kubens masscentrum.

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{r}}_{\text{urgr. kub}} &= \frac{\bar{\mathbf{r}}_{\text{stor kub}} V_{\text{stor kub}} - \bar{\mathbf{r}}_{\text{liten kub}} V_{\text{liten kub}}}{V_{\text{stor kub}} - V_{\text{liten kub}}} \\
&= \frac{(0,0,0)\, a^3 - \left(\frac{a}{4}, 0, 0\right) \frac{a^3}{2^3}}{a^3 - \frac{a^3}{2^3}} \\
&= \left(-\frac{a}{28}, 0, 0\right)
\end{aligned}$$

Vidare är $m_{\text{urgr. kub}} = m - \frac{1}{8}m = \frac{7}{8}m.$ Systemet urgröpt kub + partikel har då masscentrums lägavektor given av

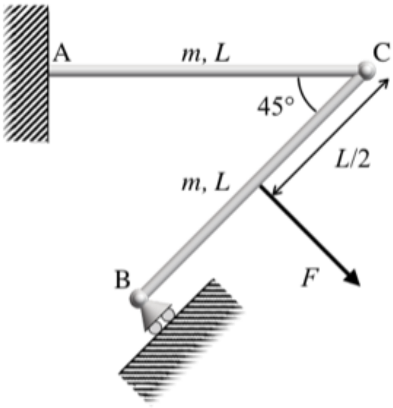
$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{r}} &= \frac{\bar{\mathbf{r}}_{\text{urgr. kub}}\, m_{\text{urgr. kub}} + \bar{\mathbf{r}}_{\text{partikel}}\, m_{\text{partikel}}}{m_{\text{urgr. kub}} + m_{\text{partikel}}} \\
&= \frac{\frac{7}{8}m \left(-\frac{a}{28}, 0, 0\right) + m_1 \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)}{\frac{7}{8}m + m_1}
\end{aligned}$$

Svar: $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \bar{\mathbf{r}} = \left(-\frac{a\,(m - 16m_1)}{4\,(7m + 8m_1)}, \frac{4am_1}{7m + 8m_1}, \frac{4am_1}{7m + 8m_1}\right).$ ∎

3. Två balkar AC och BC, båda av längden L och massan m, är förenade med en friktionsfri led i C. I A är balken AC fast inspänd i en vägg. I B är balken BC fäst med en friktionsfri led vid en liten vagn som kan rulla friktionsfritt på en yta som lutar 45°.

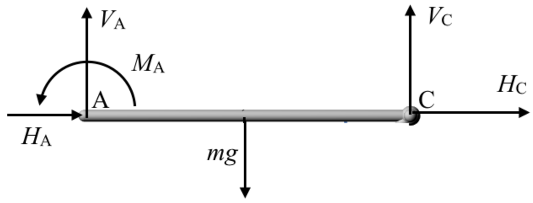
Förutom tyngdkraften verkar mitt på balken BC en kraft av storleken F, vinkelrätt mot balken.

Bestäm alla yttre tvångskrafter och tvångsmoment i A och B. (5p)



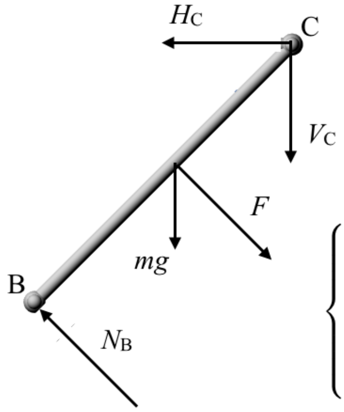
Rättad!

Lösningsskiss: Frilägg först balken AC. Ställ upp jämviktsekvationerna:



$$\begin{cases} \rightarrow: & H_A + H_C = 0 \quad (1) \\ \uparrow: & V_A + V_C - mg = 0 \quad (2) \\ \overset{\frown}{A}: & M_A + V_C L - mg\frac{L}{2} = 0 \quad (3) \end{cases}$$

Frilägg sedan balken BC. Ställ upp jämviktsekvationerna:



$$\begin{cases} \rightarrow: & -H_C + \frac{1}{\sqrt{2}}(F - N_B) = 0 \quad (4) \\ \uparrow: & -V_C - mg - \frac{1}{\sqrt{2}}(F - N_B) = 0 \quad (5) \\ \overset{\frown}{C}: & F\,\frac{L}{2} - N_B\,L + mg\frac{L}{2\sqrt{2}} = 0 \quad (6) \end{cases}$$

Alltså har vi fått sex ekvationer för de sex obekanta $V_A,\ H_A,\ M_A,\ N_B,\ V_C,\ H_C$. De fyra första är de som efterfrågas i uppgiften. Eliminera de inre tvångskrafterna och lös ut de fyra sökta obekanta.

Svar: $H_A = \frac{1}{4}\left(mg - \sqrt{2}F\right)$

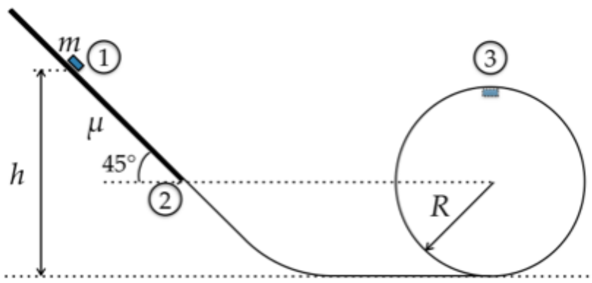
$$V_A = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2}F + 7mg\right)$$

$$M_A = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2}FL + 5mgL\right)$$

$$N_B = \frac{1}{4}\left(2F + \sqrt{2}mg\right)$$

■

4.



En äldre berg-och-dalbana har en cirkulär loop (radie R) som figuren antyder. Under ett test klättrar Berit Grahnat-Jansson* (massa m) ombord på en stillastående *mycket lätt* vagn på höjden h över marken. (Läge ①, i figuren. Tyngdkraftsaccelerationen är g.) Trots tillslagna bromsar börjar vagnen glida utför banan. Den kinetiska friktionskoefficienten är μ.

I läge ② släpper bromsarna. Under den efterföljande rörelsen rör sig vagnen friktionsfritt. (Vi försummar rullfriktionen.) Berg-och-dalbanan har skenor som förhindrar själva vagnen att lämna spåret i loopen. Vagnen når upp till läge ③ med en viss fart v_3. Berit håller sig inte fast, och använder inte heller säkerhetsbälte.

a) **Bestäm vagnens fart v_3 i läge** ③. (Uttryckt i starthöjden h och ev. μ, m, g och R.) (3p)

b) **Hur stor måste farten minst vara** i läge ③ för att Berit G-J inte skall **falla ur** vagnen? (2p)

[Med hjälp av resultaten i a) och b) kan du bl.a. räkna ut hur stor *starthöjden* måste vara för att Berit inte skall falla ur vagnen. Men det slipper du!]

*) *Välkänd äventyrare och våghals.*

Lösningsförslag: Studera rörelsen från ① till ③. Vagnen med Berit startar från vila, så $T_1 = 0$. Sätter vi potentiella energins nollnivå = 0 vid markytan, så är $V_1 = mgh$. Arbetet som friktionskraften uträttar under rörelsen är $W^{(ik)}_{12} = -(\sqrt{2}\,(h-R))\,\mu\, mg/\sqrt{2}$. $W^{(ik)}_{23} = 0$, så $W^{(ik)}_{13} = W^{(ik)}_{12} + W^{(ik)}_{23} = -(h-R)\,\mu\, mg$.

Om vi betecknar vagnens fart i läge ③ med v_3. kan vi skriva $T_3 = m\, v_3^2/2$. Vidare är $V_3 = mg \cdot 2R$.

Alltså ger $W^{(ik)}_{13} = \Delta(T+V)$ att

$$-(h-R)\mu mg = \frac{1}{2}mv_3^2 + mg(2R-h)$$

$$\Longrightarrow \quad v_3 = \boxed{\sqrt{2g\big((2R-h)-\mu(h-R)\big)}}$$

Därmed vet vi vilken fart vagnen med passagerare har i läge ③.

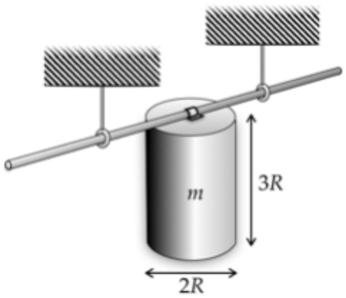
Villkoret för att Berit inte skall falla ur vagnen är att normalkraften F_n nedåt på henne (från vagnen) är positiv. Normalkomponenten av Newtons andra lag (i naturliga koordinater) är för Berit i läge ③

$$F_n + mg = ma_n = \frac{m\,v_3^2}{R}$$

Alltså är villkoret att $0 \le F_n = \dfrac{m\,v_3^2}{R} - mg \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_3 \ge \sqrt{gR}}$.

■

5.



En homogen cirkulär cylinder av massan m är fäst i en horisontell axel som figuren visar. Axeln kan momentfritt rotera kring sin längsriktning, men hela anordningen är nedsänkt i en viskös vätska som ger ett rörelsemotstånd. Approximera rörelsemotståndet som ett bromsande moment proportionellt mot vinkelhastigheten i cylinderns rörelse kring axeln: $M_{\text{broms}} = -\beta\, d\varphi/dt$, där φ är vinkeln från cylinders jämviktsläge och β är en konstant.

a) Bestäm den *odämpade egenvinkelfrekvensen* ω för cylindern vid små svängningar kring jämviktsläget. (3p)

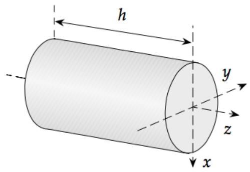
b) Bestäm den dimensionslösa *dämpningskoefficienten* ζ för cylindern vid små svängningar kring jämviktsläget. (2p)

Lösningsskiss: Frilägg cylindern och bestäm momenten kring rotationsaxeln. Lagen för rörelsemängdsmomentet (m a p rotationsaxeln) ger då

$$I\ddot{\varphi} = \dot{L} = -mg\frac{3R}{2}\sin\varphi - \beta\,\dot{\varphi}$$

där vi kan få masströghetsmomentet I från sidan 17 i formelsamlingen:

Tabeller 17

KROPP	MASS-CENTRUM	MASSTRÖGHETSMOMENT
Cirkulär cylinder 		$I_x = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}mh^2$ $\bar{I}_x = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}mh^2$ $I_z = \frac{1}{2}mr^2$

Alltså: $I = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{3}m(3R)^2 = \frac{13}{4}mR^2$. För små utslagsvinklar blir vidare $\sin\varphi \approx \varphi$, så vi har

$$\ddot{\varphi} + \frac{\beta}{I}\dot{\varphi} + \frac{3Rmg}{2I}\varphi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{4\beta}{13mR^2}\dot{\varphi} + \frac{6g}{13R}\varphi = 0$$

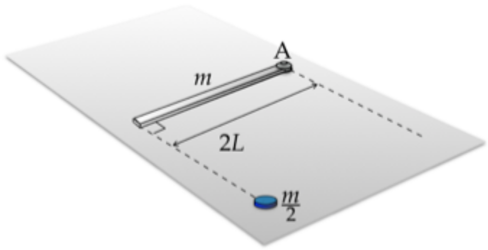
Jämför den senare ekvationen med ekvationen för dämpade fria svängningar på standardformen:

$$\begin{aligned} &\ddot{\varphi} + \frac{4\beta}{13mR^2}\dot{\varphi} + \frac{6g}{13R}\varphi = 0 \\ &\ddot{\varphi} + 2\zeta\omega\,\dot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \omega^2 &= \frac{6g}{13R} \\ 2\zeta\omega &= \frac{4\beta}{13mR^2} \end{aligned}$$

Alltså får vi a) $\omega = \boxed{\sqrt{\frac{6g}{13R}}}$ och b) $\zeta = \frac{1}{2\omega}\frac{4\beta}{13mR^2} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{6g}{13R}}}\frac{4\beta}{13mR^2} = \boxed{\sqrt{\frac{2\beta^2}{39gm^2R^3}}}$.

■

6.



En stel homogen balk av massan m och längden $2L$ kan rotera friktionsfritt kring en axel vid A i figuren. I A är balken fäst i en torsionsfjäder, som ger ett återförande moment M_A på balken:

$$M_A = -k\,\varphi.$$

där φ är vinkeln som balken vrids från sitt jämviktsläge.

En *liten* friktionsfri puck av massan *m*/2 skjuts mot balken så att den träffar längst ut på balken i jämviktsläget, vinkelrätt mot balkens längsriktning, med farten v_0. Ett tuggummi på pucken får den att fastna vid balken.

Bestäm balkens maximala utslagsvinkel under den efterföljande rörelsen. (5p)

[Ledning: Antag att balken *under själva kollisionen* inte hinner flytta sig någon signifikant vinkel. *Under själva kollisionen* hinner fjädern då inte börja utöva något återförande moment på balken.]

Lösningsskiss: I fall a) är systemets rörelsemängdsmoment m a p A alldeles innan/efter kollisionen

$$L_{\text{A innan}} = \frac{m}{2}v_0 \cdot 2L + I_{\text{A balk}} \cdot 0$$
$$L_{\text{A efter}} = \frac{m}{2}(2L)^2\omega_1 + I_{\text{A balk}}\,\omega_1$$

Precis efter kollisionen är alltså rotationshastigheten

$$\omega_1 = \frac{mv_0L}{2mL^2 + I_{\text{A balk}}}, \quad \text{där} \quad I_{\text{A balk}} = \frac{1}{3}m(2L)^2$$

Alltså $\omega_1 = \dfrac{3\,v_0}{10\,L}$. Systemets kinetiska energi är då $T_1 = \frac{1}{2}\left(2mL^2 + \frac{4}{3}mL^2\right)\omega_1^2 = \frac{3}{20}mv_0^2$.

Vid maximalt vinkelutslag är kinetiska energin $T_2 = 0$, och potentiella energin pga torsionsfjädern är

$$V_2 = \frac{1}{2}k\,\varphi_{\max}^2$$

Den totala mekaniska energin är under rörelsen mellan kollisionen och maximalt vinkelutslag, så

$$\frac{1}{2}k\,\varphi_{\max}^2 = \frac{3}{20}mv_0^2$$

Alltså är svaret $\varphi_{\max} = \boxed{\sqrt{\dfrac{3mv_0^2}{10k}}}$.

■