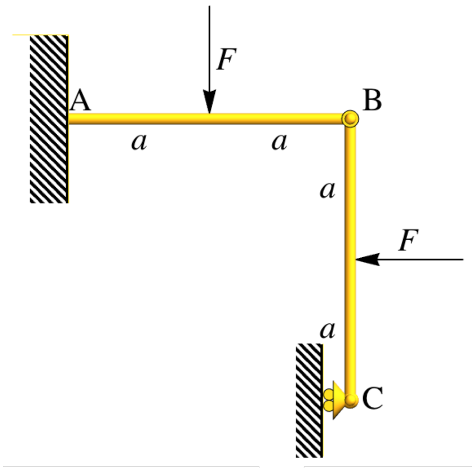
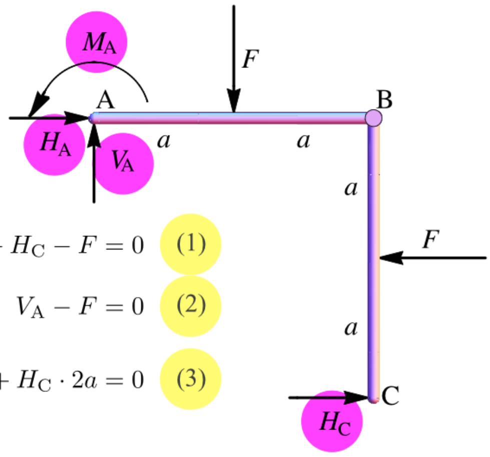
Lösningsförslag till TENTAMEN TME011 Mekanik
2015-08-17

1. 

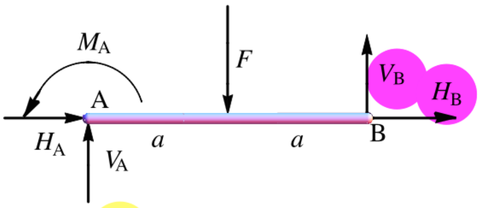
Två stela, *lätta* stänger AB och BC är momentfritt förbundna med varandra i B. AB och BC är vardera av längden $2a$. AB är i änden A fast inspänd i en vägg. BC är i punkten C momentfritt fäst i en liten vagn som rör sig friktionsfritt längs en annan vertikal vägg. Två krafter vardera av storleken F angriper i stängernas mittpunkter enligt figuren härintill. Bestäm stödreaktionerna i punkterna A och C. (5p)

Frilägg först hela ABC:



$$\begin{cases} \rightarrow: & H_A + H_C - F = 0 \quad (1) \\ \uparrow: & V_A - F = 0 \quad (2) \\ \overset{\curvearrowleft}{A}: & M_A - Fa - Fa + H_C \cdot 2a = 0 \quad (3) \end{cases}$$

Frilägg sedan AB:



$$\begin{cases} \rightarrow: & H_A + H_B = 0 \quad (4) \\ \uparrow: & V_A + V_B - F = 0 \quad (5) \\ \overset{\curvearrowleft}{B}: & M_A - V_A \cdot 2a + Fa = 0 \quad (6) \end{cases}$$

Sex ekvationer för sex obekanta. Löses t ex så här:

Ekvation (2) ger $V_A = F$.

Insättning i ekvation (5) ger $V_B = 0$.

Sätt in $V_A = F$ i ekvation (6). Då fås $M_A = Fa$.

Sätt in $M_A = Fa$ i ekvation (3) så fås $H_C = ½F$.

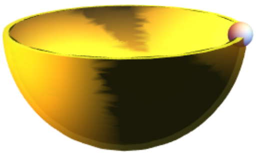
Insatt i ekvation (1) ger det $H_A = ½F$.

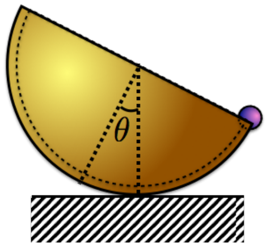
Insatt i ekvation (4) ger det $H_B = -½F$.

(VB och HB efterfrågas ej, så de behöver inte vara med i svaret.)

■

2.





Ett tunnväggigt homogent halvsfäriskt skal har radien r och massan m_0. På randen av skålen har en liten (“punktformig”) massa m_1 fastnat. Skålen ställs på ett horisontalplan, och kommer, på grund av den punktformiga massan, att luta en vinkel θ, som den undre figuren antyder.

Bestäm vinkeln θ uttryckt i övriga storheter. (5p)

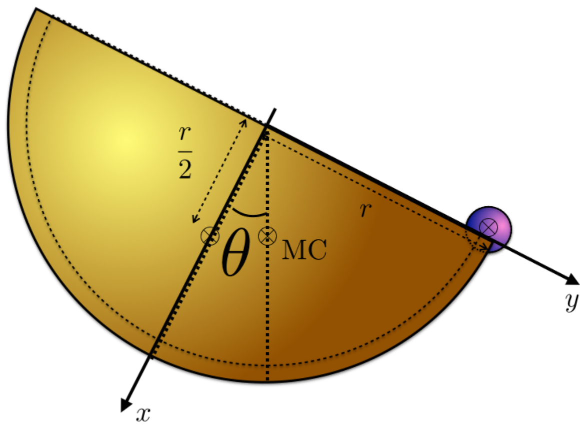
Bestäm masscentrums (MC:s) läge. Pga momentjämvikt kommer MC att hamna rakt över kontaktpunkten mellan skålen och underlaget.

$$\bar{x}_{\mathrm{MC}} = \frac{m_0 \cdot \frac{r}{2} + m_1 \cdot 0}{m_0 + m_1} = \frac{m_0 r}{2(m_0 + m_1)}$$

$$\bar{y}_{\mathrm{MC}} = \frac{m_0 \cdot 0 + m_1 \cdot r}{m_0 + m_1} = \frac{m_1 r}{(m_0 + m_1)}$$

$$\tan\theta = \frac{\bar{y}_{\mathrm{MC}}}{\bar{x}_{\mathrm{MC}}} = 2\frac{m_1}{m_0}$$

Svar: $\theta = \arctan\left[2\frac{m_1}{m_0}\right]$

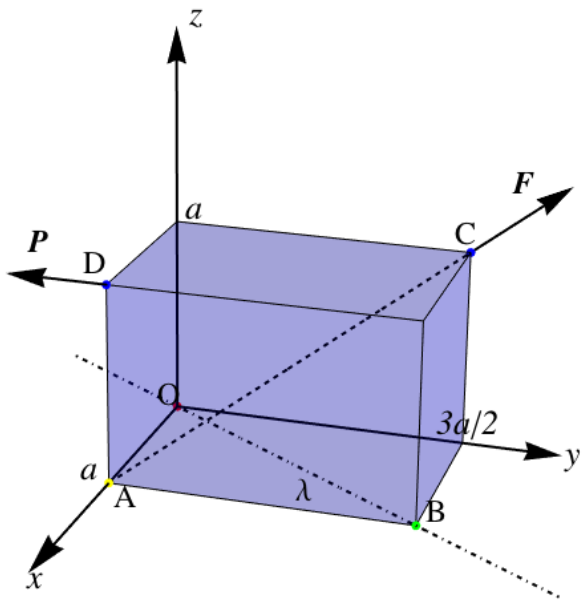


3. Ett homogent rätblock med massan m och mått som i figuren här intill är momentfritt vridbart kring den fixa axeln λ som går genom origo O och rätblockets hörn B. (z-axeln i figuren är vertikal.)

En kraft $\boldsymbol{F}$, med storleken F, verkar på rätblocket i punkten C, och har sin verkningslinje genom hörnen A och C i figuren.

Bestäm storleken P av kraften $\boldsymbol{P}$ som verkar i negativa y-riktningen i hörnet D, så att rätblocket förblir i jämvikt.

(5p)



Jämviktsvillkoret är momentjämvikt m.a.p. axeln λ. Vi beräknar momentsumman av $\boldsymbol{F}$ och $\boldsymbol{P}$ m.a.p. O, och tar sedan dennas summas komponent i λ:s riktning:

$$0 = \mathbf{e}_\lambda \bullet \left(\overrightarrow{\mathrm{OC}} \times \boldsymbol{F} + \overrightarrow{\mathrm{OD}} \times \boldsymbol{P} \right)$$

$$\mathbf{e}_\lambda = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|} = \frac{1}{\sqrt{a^2\left(1+\frac{9}{4}\right)}} \left(\mathbf{e}_x a + \mathbf{e}_y \frac{3a}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{13}} \left(2\mathbf{e}_x + 3\mathbf{e}_y \right)$$

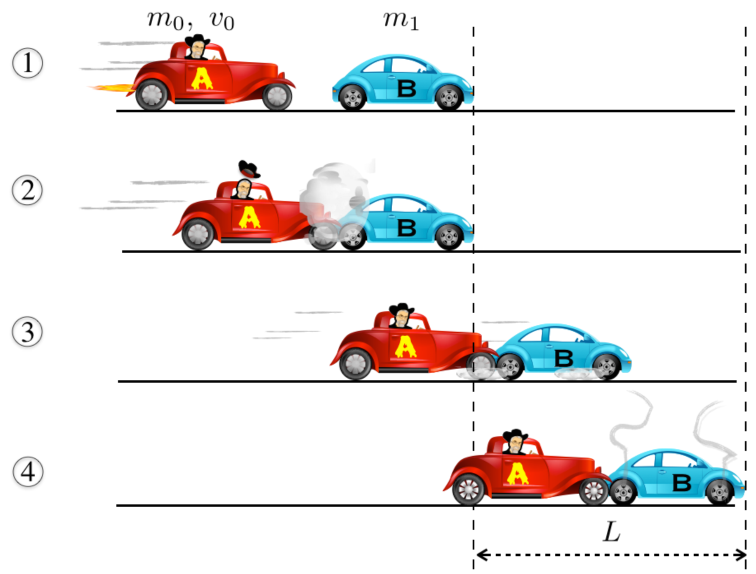
$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} \times \boldsymbol{F} = \left(\mathbf{e}_y \frac{3a}{2} + \mathbf{e}_z a \right) \times F \frac{\left(-\mathbf{e}_x + \frac{3}{2}\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \right)}{\sqrt{1+\frac{9}{4}+1}} = \ldots$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} \times \boldsymbol{P} = \left(\mathbf{e}_x a + \mathbf{e}_z a \right) \times \left(-P\mathbf{e}_y \right) = \ldots$$

Slutligen får vi svaret: $$P = \frac{3F}{\sqrt{17}}$$

■

4.



① En ouppmärksam professor kör sin bil rätlinjigt med farten v_0 på en horisontell vägbana. Ekipaget A (se figuren), som består av professorn och hans bil, har massan m_0.

② Professorn kör rakt in i baken på en parkerad bil B, vars hjul är låsta. B har massan m_1. När bilarna kolliderar hoppar växellådan i professorns bil till friläget, så att hans bil rullar med försumbar friktion.

③ Kollisionen är så kraftig att bilarna fastnar i varandra, och glider framåt, endast bromsade av friktionen mellan vägbanan och B:s låsta däck. Friktionskoefficienten mellan däck och väg är μ.

④ Efter att bilarna har glidit en sträcka L längs vägen har de slutligen stannat.

Under antagandet att bilarnas respektive hjul även efter kollisionen uppbär den egna bilens tyngd, bestäm hur lång sträckan L är, uttryckt i tyngdkraftsaccelerationen g och övriga givna storheter! (5 p)

Rörelsemängden bevaras under kollisionen: $m_0 v_0 + m_1 \cdot 0 = (m_0 + m_1) v_{\text{glidstart}}$

(A+B):s sammanlagda kinetiska energi alldeles efter kollisionen: $V_{\text{glidstart}} = \frac{1}{2}(m_0 + m_1) v_{\text{glidstart}}^2$

(A+B):s sammanlagda kinetiska energi när bilarna stannat: $V_{\text{stopp}} = 0$

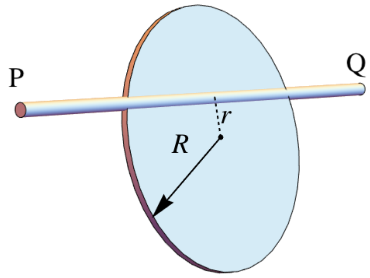
Friktionsarbetet mellan B:s däck och vägbanan under inbromsningen: $W_{\text{friktion}} = (\mu m_1 g) L$

Lagen om den kinetiska energin ger: $W_{\text{friktion}} = \Delta V = V_{\text{glidstart}} - V_{\text{stopp}}$

Sammantaget får vi att $L = \dfrac{{m_0}^2 v_0^2}{2g\,\mu\, m_1\,(m_0 + m_1)}$.

■

5.



En homogen cirkulär skiva av massan *m* är fäst i en fix horisontell axel PQ som figuren visar. Axeln kan momentfritt rotera kring sin längsriktning. Om skivan släpps från vila i horisontellt läge, vad är dess vinkelhastighet när den når vertikalt läge? (5p)

Enligt formelsamlingen (MM Japp) så är skivans masströghetsmoment m.a.p. en axel genom dess masscentrum, parallell med PQ,

$$\bar{I} = \frac{1}{4}mR^2$$

Steiners sats ger då att skivans masströghetsmoment m.a.p. PQ är

$$I = \frac{1}{4}mR^2 + mr^2$$

Den totala mekaniska energin hos skivan bevaras under rörelsen från horisontellt till vertikalt läge (ty inga icke-konservativa krafter). Dess värde i respektive läge ges

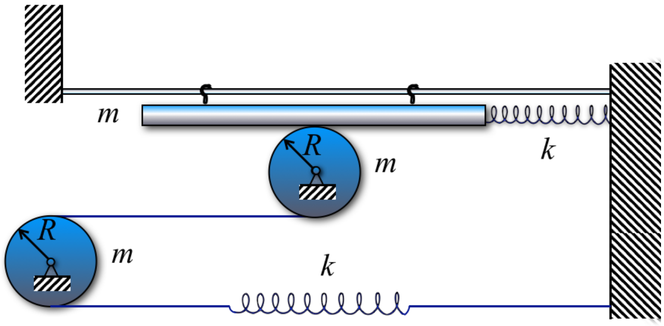
$$E_{\text{hor}} = T_{\text{hor}} + V_{\text{hor}} = 0 + 0 = 0$$
$$E_{\text{ver}} = T_{\text{ver}} + V_{\text{ver}} = \frac{1}{2}I\omega^2 - mgr$$

där vi lagt nollnivån för potentiella energin i tyngdkraftfältet på samma nivå som axeln PQ. Alltså får vi svaret

$$\omega = \frac{2\sqrt{2gr}}{\sqrt{4r^2 + R^2}}$$

■

6.



En homogen stång av massan m kan glida friktionsfritt längs en horisontell skena. En homogen cirkulär cylinder av massan m och radien R kan, genom att rotera kring sin fixa axel, driva stången längs skenan. (Ingen glidning mellan stång och cylinder.) Dessutom är stångens ena ände medelst en linjär fjäder, med fjäderkonstant k, fäst vid en vägg.

En otänjbar lina löper glidningsfritt kring cylindern och vidare (också glidningsfritt) runt en andra, identisk cylinder som figuren visar. Linan är via en linjär fjäder med fjäderkontanten k fäst i en vägg. (Se figuren. Linan förblir spänd under hela rörelsen.)

Bestäm systemets egenvinkelfrekvens ω. (5p)

Ställ för enkelhets skull upp den totala mekaniska energin $E = T + V$:

$$V = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}kx^2 = kx^2 \qquad \text{(Två fjädrar)}$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 = m\dot{x}^2 \qquad \text{(En stång och två cylindrar)}$$

$$E = m\dot{x}^2 + kx^2$$

E är konstant (inga icke-konservativa krafter), så

$$0 = \dot{E} = 2m\dot{x}\ddot{x} + 2kx\dot{x} = 2m\dot{x}\left(\ddot{x} + \frac{k}{m}x\right) \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Jämför detta med $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, så fås svaret $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

■