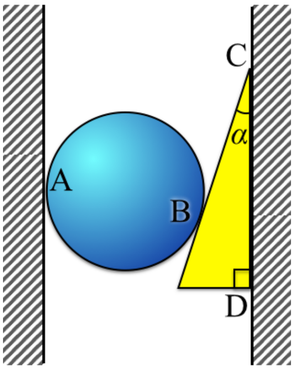
Lösningsskisser till TENTAMEN TME011 Mekanik, 2015-01-03

---

1. 

Ett homogent sfäriskt klot med radien r och massan m_0 har fastnat mellan en vertikal vägg och en kil av massan m_1. Kilens toppvinkel, vid C i figuren, är α.

I punkten A (se figuren) är friktionskoefficienten μ mellan klot och vägg.

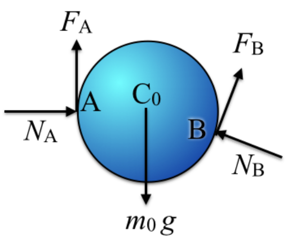
Längs kilens vertikala sida CD råder friktionskoefficienten μ (samma som i A) mellan CD och den högra vertikala väggen.

I kontaktpunkten B mellan klotet och kilen är däremot friktionskoefficienten lika med noll.

Bestäm hur stor friktionskoefficienten μ minst måste vara för att klotet och kilen skall kunna vara i jämvikt i det angivna läget! (Observera att friktionen inte nödvändigtvis är fullt utbildad i A och/eller längs CD.)

(5p)

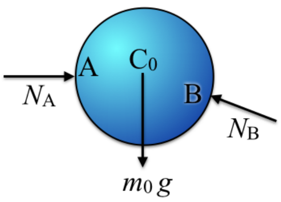
Frilägg först klotet. Eftersom kontakten mellan klot och kil är friktionsfri måste $F_B = 0$.



Tar vi hänsyn till att $F_B = 0$, och ställer upp momentjämviktsekvationen för klotet m a p dess centrum C_0, ser vi att också $F_A = 0$.

Ställ sedan upp kraftjämviktsekvationerna för klotet:

$$\begin{cases} \uparrow: & -m_0 g + N_B \sin\alpha = 0 \\ \rightarrow: & N_A - N_B \cos\alpha = 0 \end{cases}$$

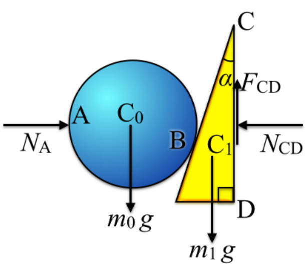


varav

$$N_B = \frac{m_0 g}{\sin\alpha}, \quad N_A = \frac{m_0 g}{\tan\alpha}.$$

Frilägg sedan hela systemet klot+kil. Kraftjämviktsekvationerna är:

$$\begin{cases} \uparrow: & -m_0 g - m_1 g + F_{CD} = 0 \\ \rightarrow: & N_A - N_{CD} = 0 \end{cases}$$



varav (m h a uttrycket för N_A ovan):

$$F_{CD} = (m_0 + m_1)g, \quad N_{CD} = \frac{m_0 g}{\tan\alpha} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{F_{CD}}{N_{CD}}\right| = \left(1 + \frac{m_1}{m_0}\right)\tan\alpha.$$

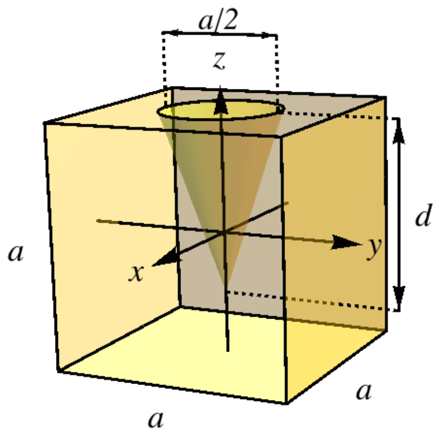
Vi vet redan att $F_A = 0$, så om bara

$$\mu \geq \left(1 + \frac{m_1}{m_0}\right)\tan\alpha$$

så är friktionsvillkoret uppfyllt både i A och längs CD. ■

[Lägg märke till att friktionen i A inte är fullt utvecklad, och att om friktionskoefficienten är större än det minsta värdet vi räknat ut är den inte heller fullt utvecklad längs CD.]

2.



Ernst vill tillverka en tjusig blomvas i plexiglas genom att från ovansidan av en homogen plexiglaskub borra ur ett koniskt hål som figuren antyder. Kuben har sidan a, och det koniska hålet har mått enligt figuren.

Bestäm masscentrums z-koordinat för vasen, som funktion av borrdjupet d (och sidlängden a). (5p)

Vi betraktar vasen som sammansatt av två homogena kroppar med samma densitet, förutom att konen har "negativ massa". Vi har

$$\bar{z}_{\text{kub}} = 0, \quad \bar{z}_{\text{kon}} = \frac{a}{2} - \frac{d}{4}$$

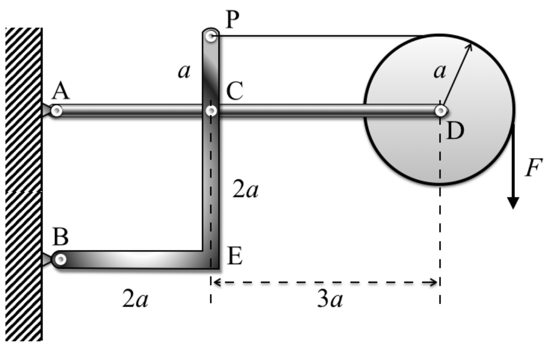
$$V_{\text{kub}} = a^3, \quad V_{\text{kon}} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{4}\right)^2 d$$

varav

$$\bar{z}_{\text{vas}} = \frac{\bar{z}_{\text{kub}}V_{\text{kub}} - \bar{z}_{\text{kon}}V_{\text{kon}}}{V_{\text{kub}} - V_{\text{kon}}} = \frac{\pi d(d-2a)}{192a - 4\pi d}$$

vilket är svaret. ■

3.



Ett stelt, *lätt* och L-format metallstycke BEP är friktionsfritt förbundet med den fixa punkten B, samt, i punkten C friktionsfritt förbundet med den stela, *lätta* balken AD. AD kan vrida sig friktionsfritt kring den fixa punkten A.

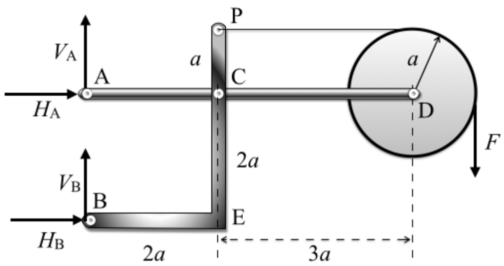
I punkten P är en lätt otänjbar lina fäst i metallstycket. Linan löper utan att glida över en lätt cylinder av radie a som friktionsfritt kan vrida sig kring punkten D.

Måtten för metallstycket och balken framgår av figuren till vänster.

En kraft av storleken F angriper i en punkt på linan som är på samma höjd som balken AD.

a) Bestäm de **horisontella** tvångskrafterna **från** väggen **på** balken AD i A, samt **på** metallstycket BEP i B. (3p)

b) Bestäm tvångskrafterna **på** balken AD **från** cylindern i punkten D. (2p)



Frilägg hela systemet till höger om väggen..

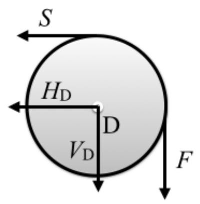
Momentjämvikt kring B ger

$$H_A\, 2a + F\,(2a + 3a + a) = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A = -3F$$

Kraftjämvikt i horisontalled ger då

$$H_B = -H_A = 3F$$

Svar a) $H_A = -3F, \quad H_B = 3F$, där minustecknet indikerar att kraften pekar åt vänster.

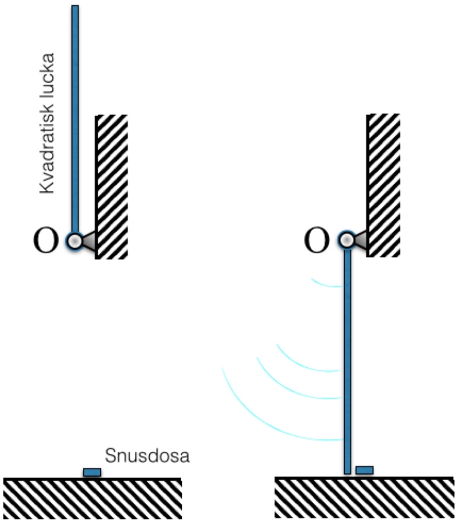


Frilägg sedan cylindern. Låt *S* beteckna linkraften. (Vi ritar tvångskrafterna med referensriktningar som i figuren p g a Newtons tredje lag.) Momentjämvikt kring D ger *S* = *F*. Kraftjämvikt i vertikalled resp horisontalled ger då direkt att

$$V_D = -F, \quad H_D = -F.$$

Svar b) *F* rakt nedåt, *F* rakt åt vänster. ■

4.



En tunn, homogen och jämntjock kvadratisk lucka med massan m och sidan d är friktionsfritt vridbar kring en horisontell axel genom O. Luckan startar från vila, i läget då den pekar vertikalt uppåt, men en infinitesimal störning får den att börja falla åt vänster i figuren. I sitt lägsta läge slår den (med mittpunkten av sin ena kant) till en liten snusdosa av massan m_{snus} som ligger på det hala golvet nedanför luckan. Snusdosan skjuts därvid iväg längs golvet. Ingen mekanisk energi att tala om går förlorad i själva kollisionen mellan lucka och dosa.

a) Bestäm luckans vinkelhastighet precis innan den träffar snusdosan. (2 p)

b) Bestäm luckans vinkelhastighet precis efter att den träffat snusdosan. Bestäm även den fart med vilken snusdosan skjuts iväg. (3 p)

---

a) Sätt nollnivån för potentiella energin i tyngdkraftfältet på samma höjd som punkten O. Luckans potentiella energi V i övre läget blir då $mgd/2$. I nedersta läget är den $-mgd/2$. Alltså är $\Delta V = -mgd$. Eftersom luckan startar från vila, är $\Delta T = I_O\, \omega_a^2/2 - 0$, där ω_a är luckans vinkelhastighet precis innan den träffar snusdosan. I_O fås från formelsamlingen: $I_O = md^2/3$. Enligt energilagen har vi $\Delta T + \Delta V = 0$, så $md^2\omega_a^2/6 = mgd$, varav $\omega_a = (6\, g/d)^{1/2}$.

b) Enligt uppgiftstexten kan vi räkna med att energin bevaras under kollisionen, så om ω_b är luckans vinkelhastighet efter kollisionen, och v_b är snusdosans fart efter kollisionen, så är

$$I_O\, \omega_a^2/2 = I_O\, \omega_b^2/2 + m_{snus}\, v_b^2/2.$$

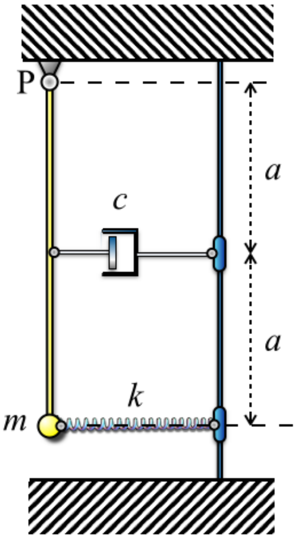
(Uppenbarligen ändras inte den potentiella energin under kollisionen!) Systemets totala rörelsemängdsmoment m a p O bevaras också under kollisionen, ty inga yttre krafter utövar just då något moment m a p O. Alltså är

$$I_O\, \omega_a = I_O\, \omega_b + m_{snus}\, v_b\, d.$$

Dessa båda ekvationer räcker för att bestämma ω_b och v_b:

$$\omega_b = \sqrt{\frac{6g}{d}}\,\frac{1-3\frac{m_{snus}}{m}}{1+3\frac{m_{snus}}{m}}, \quad v_b = \frac{2\sqrt{6gd}}{1+3\frac{m_{snus}}{m}}$$

■

5. 

En massa av storleken m är fäst i ena änden av en stel och lätt stång av längden $2a$, vilken i sin andra ände är friktionsfritt vridbar kring en fästpunkt P i taket; se figuren.

Massan är dessutom fäst i en horisontell fjäder med fjäderkonstanten k. Fjädern är ospänd i det läge då den stela stången är vertikal. (Den lilla *lätta* cylindern runt den högra stången glider friktionsfritt så att fjädern håller sig horisontell.)

Mittpunkten på den stela stången är vidare fäst i en horisontell dämpare med dämpkonstanten c. (Samma sorts cylinder kring högra stången som för fjädern, för att hålla dämparen horisontell.)

Systemet utför **små** svängningar kring jämviktsläget. Låt $\varphi(t)$ vara den vinkel varmed stången avviker från lodlinjen vid tiden t.

a) Bestäm en differentialekvation för $\varphi(t)$. (3p)
b) Bestäm den odämpade egenvinkelfrekvensen ω för systemet. (1p)
c) Bestäm den dimensionslösa dämpkonstanten ζ för systemet. (1p)

Lagen för rörelsemängdsmomentet m a p den fix punkten P ger

$$\overbrace{m\cdot(2a)}^{\text{tröghetsmomentet}} \cdot \ddot\varphi(t) = \overbrace{-2a\; mg\; \varphi(t)}^{\text{tyngdkraftens moment}} \quad \overbrace{-a\cdot c\cdot a\dot\varphi(t)}^{\text{dämpkraftens moment}} \quad \overbrace{-2a\cdot k\cdot 2a\varphi(t)}^{\text{fjäderkraftens moment}}$$

för små utslag.

Alltså får vi differentialekvationen, som är Svar a):

$$\ddot\varphi(t) + \frac{c}{4m}\,\dot\varphi(t) + \left(\frac{k}{m} + \frac{g}{2a}\right)\varphi(t) = 0$$

Jämför vi med “standardekvationen”

$$\begin{aligned}&\ddot\varphi(t) + 2\zeta\omega\dot\varphi(t) + \omega^2\varphi(t) = 0,\\ &\omega = \text{odämpade egenvinkelfrekvensen}\\ &\zeta = \text{dimensionslösa dämpkonstanten}\end{aligned}$$

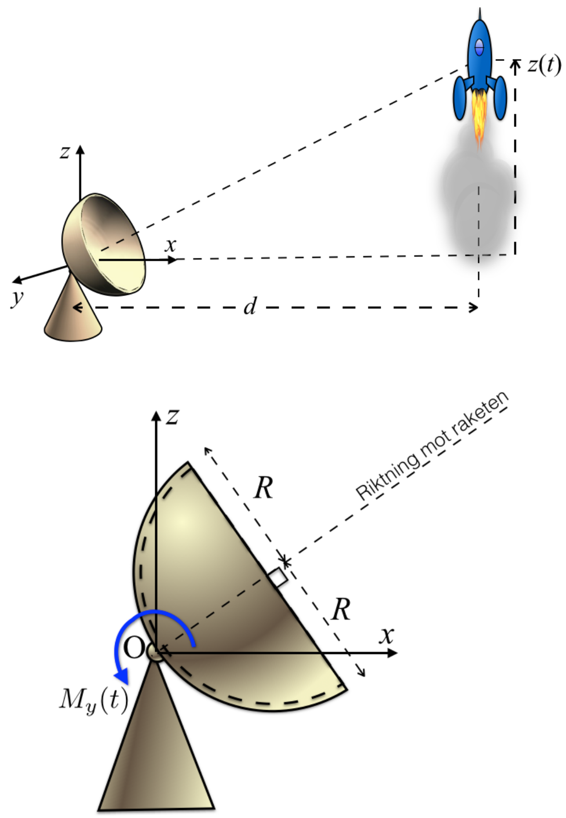
så kan vi avläsa

$$\text{Svar b) } \omega = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{g}{2a}}$$

$$\text{Svar c) } \zeta = \frac{ac}{4\sqrt{2}\sqrt{am(2ak+gm)}}$$

■

6.



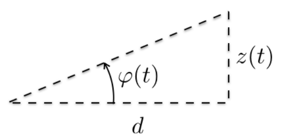
En radarantenn, i form av ett homogent och jämntjockt tunt halvsfäriskt skal av massan m och diametern $2R$, följer en raket vilken flyger rakt uppåt med konstant acceleration a.

Placera ett cartesiskt koordinatsystem Oxyz med origo i den punkt på antennen kring vilken antennen vrides. Den horisontella y-axeln är i detta fall vridningsaxeln. z-axeln är vertikal och x-axeln är horisontell. Raketen startar från vila i punkten (d, 0, 0) vid tiden t = 0.

Bestäm vilket kraftmoment $M_y(t)$ kring y-axeln som behöver påverka antennen för att antennen skall kunna följa (dvs hela tiden peka rakt mot) raketen under dess uppstigning. (5p)

Eftersom raketen har konstant acceleration a, och startar från vila i z = 0 vid t = 0, får vi efter två integrationer

$$z(t) = \frac{a}{2}t^2 .$$



Betraktar vi triangeln med hörn i (0,0,0), (d,0,0) och (d,0, $z(t)$) [dvs i O, raketens startpunkt och dess läge vid tiden t], så ser vi att antennens elevationsvinkel är

$$\varphi(t) = \arctan\left(\frac{z(t)}{d}\right) = \arctan\left(\frac{a\,t^2}{2d}\right)$$

Enligt lagen för rörelsemängdsmomentet, tillämpad på "antennskålen", är

$$\sum M_O = I_O\ddot{\varphi}(t) \quad \Rightarrow \quad M_y(t) - mg\overline{r}\cos\varphi(t) = I_O\ddot{\varphi}(t)$$

Enligt formelsamlingen (M M Japp) så är

$$\overline{r} = R - \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}R$$

och masströghetsmomentet är m h a formelsamlingen och Steiners sats

$$I_O = \overline{I}_O + m\overline{r}^2 = \frac{5}{12}mR^2 + m\left(\frac{1}{2}R\right)^2 = \frac{2}{3}mR^2$$

Därmed har vi alla ingredienser för att lösa ut $M_y(t)$ explicit:

$$M_y(t) = \frac{1}{3}mR\left(\frac{3dg}{\sqrt{a^2t^4+4d^2}} + \frac{8dR\left(4ad^2-3a^3t^4\right)}{\left(a^2t^4+4d^2\right)^2}\right)$$

■