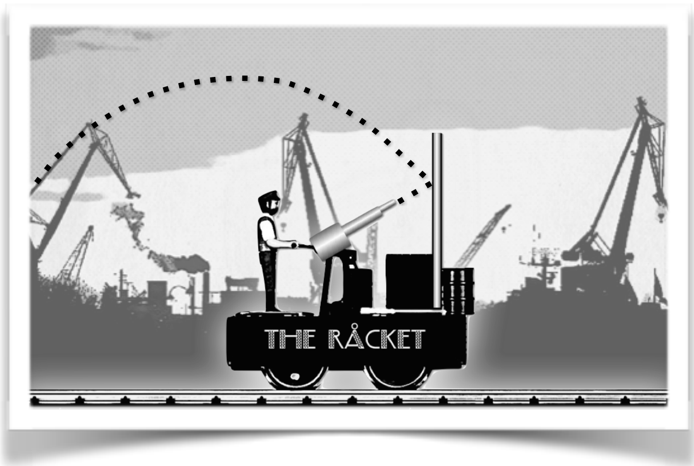
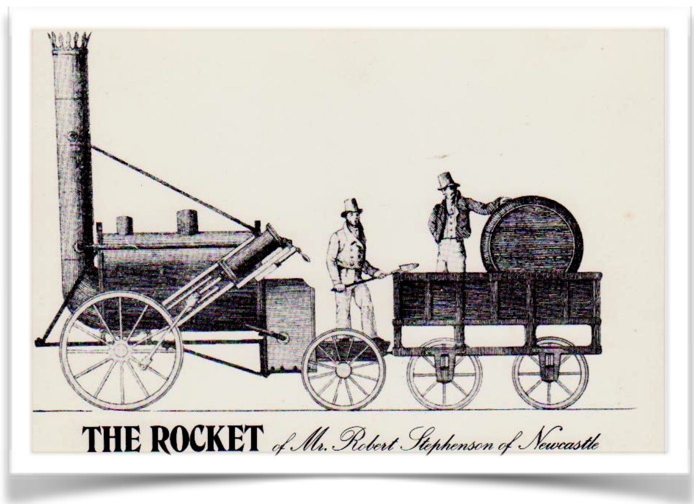
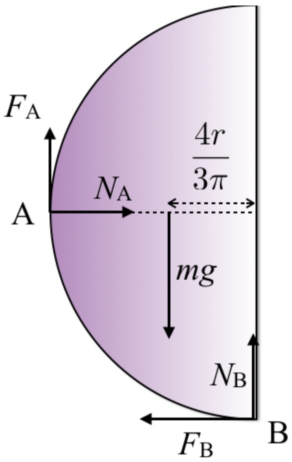
LÖSNINGSSKISSER till Tentamen TME011 Mekanik Z 2014-10-27





Lösning:

1.



$$\begin{cases} \uparrow: & F_\mathrm{A} - mg + N_\mathrm{B} = 0 \quad (1) \\ \rightarrow: & N_\mathrm{A} - F_\mathrm{B} = 0 \quad (2) \\ \overset{\curvearrowleft}{\mathrm{B}}: & mg\frac{4r}{3\pi} - F_\mathrm{A}r - N_\mathrm{A}r = 0 \quad (3) \end{cases}$$

Fullt utvecklad friktion i A och B:

$$\begin{cases} \text{Fullt utvecklad friktion i A}: & F_\mathrm{A} = \mu N_\mathrm{A} \quad (4) \\ \text{Fullt utvecklad friktion i B}: & F_\mathrm{B} = \mu N_\mathrm{B} \quad (5) \end{cases}$$

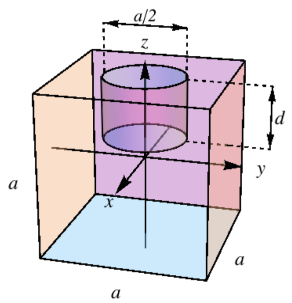
Eliminera alla variabler utom μ. Detta ger en andragradsekvation för friktionskoefficienten, med *en* positiv rot.

Svar:

$$3\pi\mu(\mu+1) - 4\left(\mu^2+1\right) = 0$$

■

2.



Kuben är homogen, så densiteten är konstant. Vi kan alltså räkna på volymer i stället för massor.

$$V_{\text{hel kub}} = a^3$$
$$\overline{z}_{\text{hel kub}} = 0$$
$$V_{\text{hål}} = \pi \left(\frac{a}{4}\right)^2 d$$
$$\overline{z}_{\text{hål}} = \frac{1}{2}(a-d)$$

För hela fågelbadet blir:

$$\begin{aligned}\overline{z}_{\text{fågelbad}} &= \frac{V_{\text{hel kub}}\overline{z}_{\text{hel kub}} - V_{\text{hål}}\overline{z}_{\text{hål}}}{V_{\text{hel kub}} - V_{\text{hål}}} \\ &= -\frac{\pi d(a-d)}{32a - 2\pi d}\end{aligned}$$

Det är svaret på deluppgift 2a.

För b-uppgiften deriverar vi detta uttryck och sätter derivatan till 0 för att finna extrempunkten som den lösning till

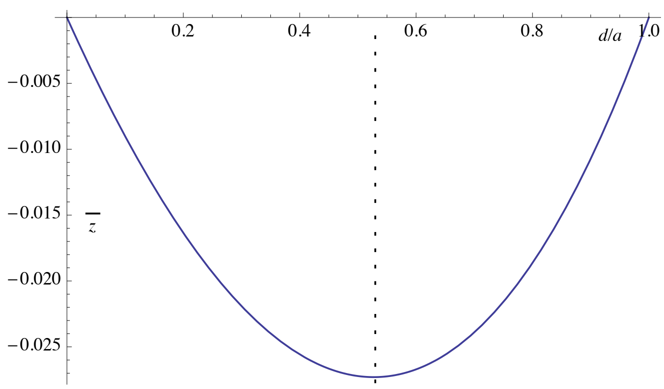
$$0 = \frac{\partial \overline{z}_{\text{fågelbad}}}{\partial d} = -\frac{\pi\left(16a^2 - 32ad + \pi d^2\right)}{2(\pi d - 16a)^2}.$$

som ligger mellan 0 och a.

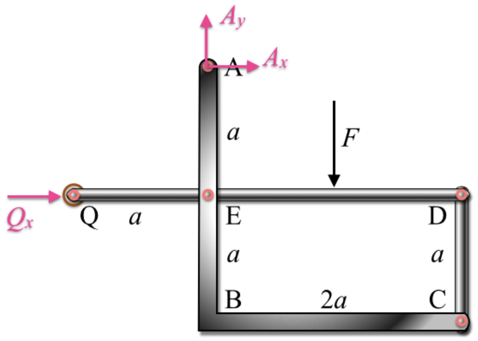
Svar: a) $\overline{z}_{\text{fågelbad}} = -\dfrac{\pi d(a-d)}{32a - 2\pi d}$

b) $d = \dfrac{32 - \sqrt{1024 - 64\pi}}{2\pi} a \approx 0.527a$

■



3.



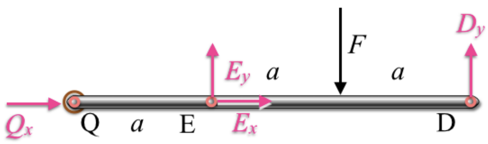
Frilägg hela systemet ABC + CD + DQ. Inför de tre tvångskrafterna A_x, A_y och Q_x.

$$\begin{cases} \rightarrow: & A_x + Q_x = 0 & (1) \\ \uparrow: & A_y - F = 0 & (2) \\ \overset{\curvearrowleft}{\mathrm{A}}: & Q_x a - Fa = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (2) &\Rightarrow A_y = F \\ (3) &\Rightarrow Q_x = F \qquad (4) \\ (1)\&(4) &\Rightarrow A_x = -F \end{aligned}$$

Frilägg CD för att konstatera att de yttre krafterna (ur CD:s synpunkt) bildar ett tvåkraftsystem! Alltså endast krafter längs stångens riktning (”y-riktningen”).

Frilägg DQ:



$$\begin{cases} \rightarrow: & E_x + Q_x = 0 & (5) \\ \uparrow: & E_y - F + D_y = 0 & (6) \\ \overset{\curvearrowleft}{\mathrm{E}}: & D_y \cdot 2a - Fa = 0 & (7) \end{cases}$$

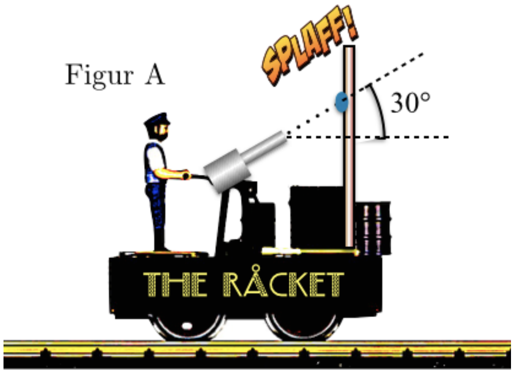
$$\begin{aligned} (5)\&(4) &\Rightarrow E_x = -F \\ (7) &\Rightarrow D_y = \frac{1}{2}F \qquad (8) \\ (6)\&(8) &\Rightarrow E_y = \frac{1}{2}F \end{aligned}$$

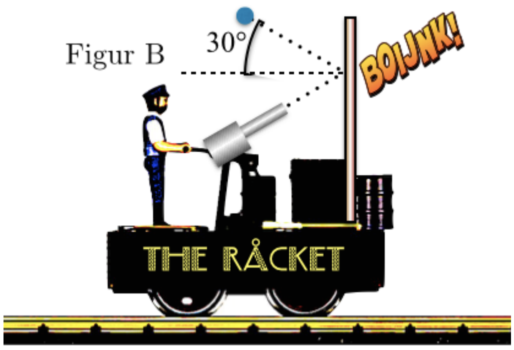
Svar: a) $A_x = -F, \quad A_y = F, \quad Q_x = F.$

b) $(-E_x) = F, \quad (-E_y) = -\frac{1}{2}F$

■

4.





I första fallet påverkas hela systemet inte av några yttre krafter i horisontalled, så rörelsemängden i horisontalled är bevarad. Eftersom rörelsemängden för systemet dressin inkl lerklump är noll innan kanonen avfyras, är den noll efter det att leran fastnat igen. Farten är alltså noll.

(Men dressinen har flyttat sig en liten bit, eftersom tyngdpunkten för lerklumpen rört sig en liten bit åt höger. Hela systemets tyngdpunkt ligger ju stilla, så dressinen utan lerklump måste ha rört sig en liten bit åt vänster, men stannar när lerklumpen daskar i väggen och fastnar.)

I det andra fallet har vi inte heller några yttre krafter i horisontalled, och rörelsemängden är alltså bevarad i horisontalled. Alltså

$$(m - m_0)v_\mathrm{B} - m_0 v_1 \cos 30^\circ = 0$$

varav

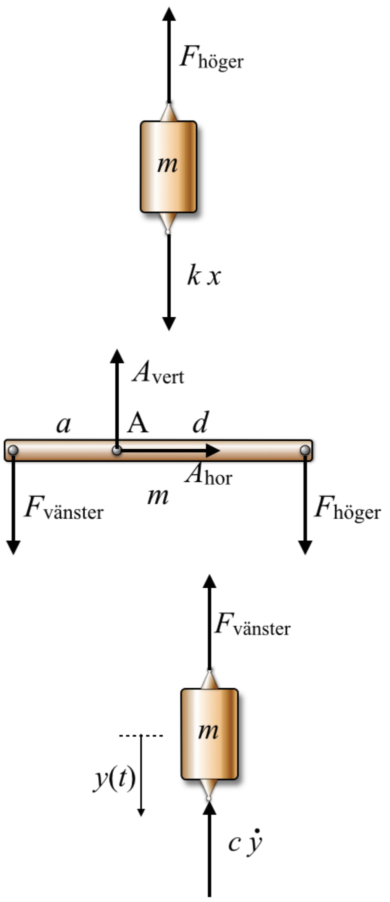
$$m = \left(1 + \frac{\sqrt{3}v_1}{2v_\mathrm{B}}\right) m_0$$

Svar: a) $v_\mathrm{A} = 0$

b) $m = \left(1 + \frac{\sqrt{3}v_1}{2v_\mathrm{B}}\right) m_0$

■

5.



Frilägg först den högra massan och ställ upp Newtons andra lag. Därvid kan vi bortse från mg eftersom $x(t)$ räknas från jämviktsläget!

$$m\ddot{x} = -kx + F_{\text{höger}} \tag{1}$$

Sedan frilägger vi stången och ställer upp lagen för rörelsemängdsmomentet m a p A:

$$-F_{\text{höger}}d + F_{\text{vänster}}a = I_{\text{A}}\left(\frac{\ddot{x}}{b}\right) \tag{2}$$

där I_{A} kan fås ur FS och Steiners sats:

$$I_{\text{A}} = \overline{I}_{\text{A}} + m\left(\frac{d-a}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}m(a^2+d^2-ad)$$

Sedan frilägger vi den vänstra massan:

$$m\ddot{y} = -c\dot{y} - F_{\text{vänster}} \tag{3}$$

Nu kan vi använda det kinematiska sambandet $x/d = y/a$, och eliminera $F_{\text{vänster}}$ och $F_{\text{höger}}$ från (2) med hjälp av (1) och (3). Det ger diffekvationen

Svar: a)
$$m\left(4a^2 - ad + 4d^2\right)\ddot{x}(t) + 3a^2c\dot{x}(t) + 3d^2kx(t) = 0$$

Dividera ner faktorn framför andraderivatan, och jämför med ”standardekvationen”

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega\dot{x}(t) + \omega^2x(t) = 0$$

så får vi direkt att

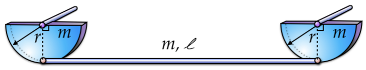
Svar: b)
$$\omega = \sqrt{\frac{3d^2k}{m\left(4a^2 - ad + 4d^2\right)}}$$

och att

Svar: c)
$$\zeta = \frac{\sqrt{3}a^2c}{2d\sqrt{k}\sqrt{m\left(4a^2 - ad + 4d^2\right)}}.$$

■

6.



Inget arbete uträttas av några icke-konservativa krafter under rörelsen från övre till undre läget. Totala mekaniska energin är därför bevarad.

Lägg nollnivån för potentiella energin i tyngdkraftfältet i samma horisontalplan som de båda axlarna ligger i.

Potentiell energi respektive kinetisk energi i det övre läget, i vila:

$$V_1 = mgr + mg\frac{4r}{3\pi} + mg\frac{4r}{3\pi} = \frac{1}{3}\left(3 + \frac{8}{\pi}\right)mgr$$

$$T_1 = 0$$

I det understa läget:

$$V_2 = -mgr - mg\frac{4r}{3\pi} - mg\frac{4r}{3\pi} = -\frac{1}{3}\left(3 + \frac{8}{\pi}\right)mgr$$

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_{\text{halvcirkel}}\left(\frac{v}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}I_{\text{halvcirkel}}\left(\frac{v}{r}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + 2\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\left(\frac{v}{r}\right)^2 = mv^2 \end{aligned}$$

Eftersom

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

så

$$mv^2 - \frac{2}{3}\left(3 + \frac{8}{\pi}\right)mgr = 0$$

varav

$$v = \sqrt{\frac{2}{3}\left(3 + \frac{8}{\pi}\right)}\,\sqrt{gr}$$

(ty farten är ≥ 0).

Svar: $v = \sqrt{\frac{2}{3}\left(3 + \frac{8}{\pi}\right)}\,\sqrt{gr}$

■