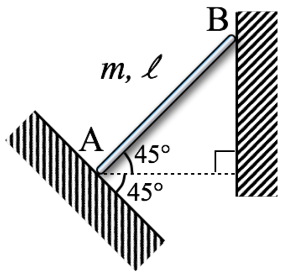
1.



En stege vilar mot ett sluttande hustak och en vertikal vägg som de båda figurerna antyder. Stegens massa m är jämnt fördelad längs stegens längd ℓ. Den vertikala väggen är glatt. (Det är alltså ingen friktion mellan stege och vägg i den ände av stegen som betecknas med B i den övre figuren.)

Hur stor måste friktionskoefficienten μ mellan stegen och taket (i änden som betecknas med A i den övre figuren) **minst vara** för att jämvikt skall vara möjlig i det angivna läget?

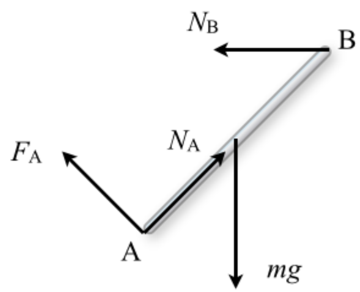
(5 p)

[Friktion; 2D kraft- och momentjämvikt.]

LÖSNINGSSKISS:

Räkna ut vad friktionskoefficienten har för värde på gräsen till glidning. Det ger det minsta möjliga värdet!

Frilägg stegen och inför tvångskrafterna:



Observera att vi ritar friktionskraften snett uppåt. Att den pekar i den riktningen följer av momentjämvikt kring masscentrum och riktningen av normalkraften i B.

Uppställ jämviktsekvationerna och friktionsvillkoret:

$$\begin{cases} \nearrow: \quad N_A - \frac{1}{\sqrt{2}}mg - \frac{1}{\sqrt{2}}N_B = 0 & (1) \\ \nwarrow: \quad F_A - \frac{1}{\sqrt{2}}mg + \frac{1}{\sqrt{2}}N_B = 0 & (2) \\ \overset{\frown}{A}: \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}mg\frac{1}{2}\ell + \frac{1}{\sqrt{2}}N_B\ell = 0 & (3) \\ \text{På gränsen till glidning}: \quad F_A = \mu_{\min} N_A & (4) \end{cases}$$

SVAR:

$$\mu_{\min} = \frac{1}{3}$$

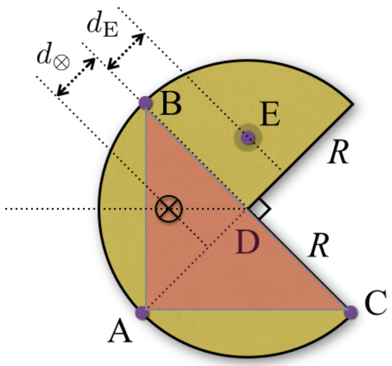
LÖSNINGSSKISS:

För att jämvikt skall vara möjlig måste masscentrum för plastskiva + massan i ögat falla inom triangeln ABC. Annars ger nämligen momentjämvikt kring AB, BC eller CA att någon av linorna måste trycka nedåt mot plastskivan, vilket en (lätt) lina inte kan.

I detta fall är det momentjämvikt kring BC som är kritisk. Masscentrum för plastskivan fås ur FS sid 15 (”Cirkelsektor (yta)”), och är inritat i figuren nedan.

$$d_\otimes = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2R\frac{1}{\sqrt{2}}}{3\frac{3\pi}{2}} = \frac{2R}{9\pi}$$

$$d_\mathrm{E} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{R}{2} = \frac{R}{2\sqrt{2}}$$



Villkoret för att jämvikt skall vara möjlig är alltså att

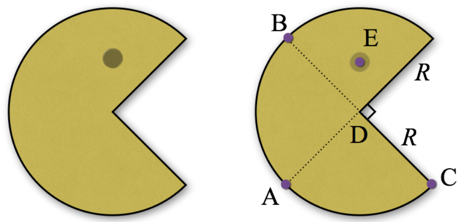
$$m\, d_\otimes > M\, d_\mathrm{E}$$

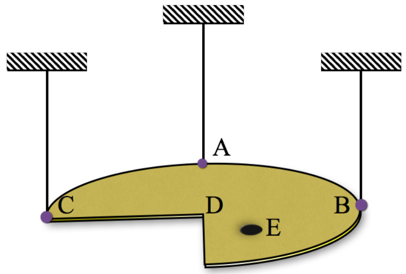
dvs att

$$M < \frac{m\,\frac{2R}{9\pi}}{\frac{R}{2\sqrt{2}}} = \frac{4\sqrt{2}}{9\pi} m \approx 0.20\, m$$

SVAR:
$M < 0.20\, m$

2.





En tunn homogen plastskiva formad som en plan Pacman-figur – se övre vänstra figuren – har massan m och mått enligt övre högra figuren. Vinkeln CDE är 135° (= 90°+45°), och avståndet ED är $R/2$.

Plastskivan hålls i jämvikt, i horisontellt läge, av tre i taket fästa vertikala otänjbara linor, som nedre figuren visar.

I punkten E (”ögat”) skall en massa M placeras. **Hur tung får denna högst vara om jämvikt skall vara möjlig?**

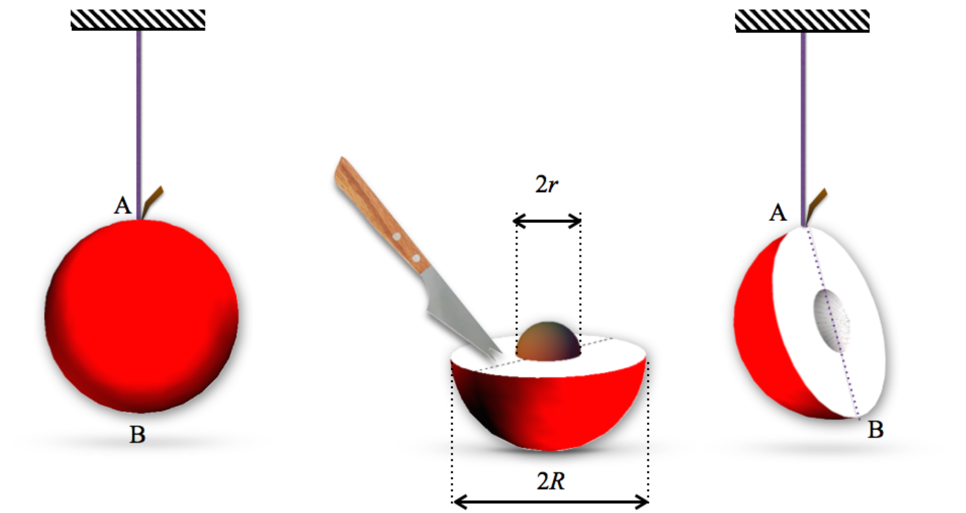
(5 p)

[2D tyngdpunktsberäkning; moment- och kraftjämvikt]

3. En klotformig frukt hänger i en lina från taket. Linan är fäst i stjälken vid A, och fruktens nedersta punkt i detta läge kallar vi B; se den vänstra figuren. Fruktköttet är homogent, liksom fruktens klotformiga kärna (som är koncentrisk med fruktköttet). Måtten framgår av den mellersta figuren.

Någon tar ned frukten och skär itu den, utan att klyva den sfäriska kärnan. Hen hänger sedan upp den kärnfria delen av frukten, med linan återigen fäst i stjälken vid A. Den kärnfria delen av frukten intar därvid sitt jämviktsläge; se den högra figuren. **Vilken vinkel bildar då AB mot lodlinjen?**

(5p)



LÖSNINGSSKISS:

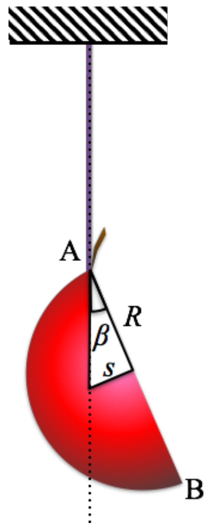
Bestäm masscentrums läge för den urkärnade delen. Använd därvid formelsamlingens uttryck för masscentrum för ett sfäriskt halvklot, samt betrakta frukthalvan som skillnaden mellan två halvklot av samma densitet.

Masscentrum ligger alltså på frukthalvans symmetriaxel, på avståndet s från mittpunkten av sträckan AB, där s ges av

$$
\begin{aligned}
s &= \frac{V_R \frac{3R}{8} - V_r \frac{3r}{8}}{V_R - V_r} = \frac{\frac{2}{3}\pi R^3 \frac{3R}{8} - \frac{2}{3}\pi r^3 \frac{3r}{8}}{\frac{2}{3}\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi r^3} \\
&= \frac{3}{8}\frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3} \\
&= \frac{3R}{8}\frac{(1+\alpha)(1+\alpha^2)}{1+\alpha+\alpha^2}, \quad \text{där} \quad \alpha = \frac{r}{R}
\end{aligned}
$$

Betrakta sedan triangeln nedan, och bestäm dess toppvinkel β:

$$
\begin{aligned}
\beta &= \arctan\frac{s}{R} \\
&= \arctan\left(\frac{3}{8}\frac{(1+\alpha)(1+\alpha^2)}{1+\alpha+\alpha^2}\right)
\end{aligned}
$$



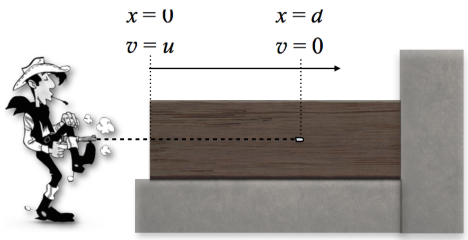
SVAR:

$$\arctan\left(\frac{3}{8}\frac{(1+\alpha)(1+\alpha^2)}{1+\alpha+\alpha^2}\right),$$

där $\alpha = \dfrac{r}{R}$

[3D tyngdpunktsberäkning mha FS och ”subtraktion av kroppar”; jämvikt.]

4. Lucky Luke skjuter en kula horisontellt in i ett fixerat stycke trä.



Innan kulan stannar, en sträcka d (det slutliga inträngningsdjupet) in i trästycket, påverkas den av tre bromsande krafter som är motriktade rörelsen:

- en konstant friktionskraft av storleken F_f,
- ett linjärt rörelsemotstånd av storleken $2F_\mathrm{f}\,v/v_0$,
- ett kvadratiskt rörelsemotstånd av storleken $F_\mathrm{f}\,(v/v_0)^2$.

Här är v_0 en konstant av dimensionen hastighet, och $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ kulans horisontella fart.

Rörelseekvationen för kulan är alltså, fram till dess att den har farten = 0,

$$m\ddot{x}(t) = -\frac{F_\mathrm{f}}{v_0^2}\left(v_0^2 + 2v_0\,\dot{x}(t) + (\dot{x}(t))^2\right)$$

Om kulan i inträngningsögonblicket har den horisontella farten u, **ge ett uttryck för det slutliga inträngningsdjupet** d i termer av F_f, v_0, u och kulans massa m**.**

[*Det är OK att svara med ett integraluttryck (om det är rätt integral)!*] (5 p)

LÖSNINGSSKISS:

Skriv om rörelseekvationens vänsterled till derivator m a p x, och skriv högerledet som en jämn kvadrat:

$$m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m\,v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{F_f}{v_0^2}\left(v_0^2 + 2v_0\,v + v^2\right) = -\frac{F_f}{v_0^2}\,(v_0 + v)^2$$

”Multiplicera upp dx” och integrera ekvationens båda led mellan samhörande värden:

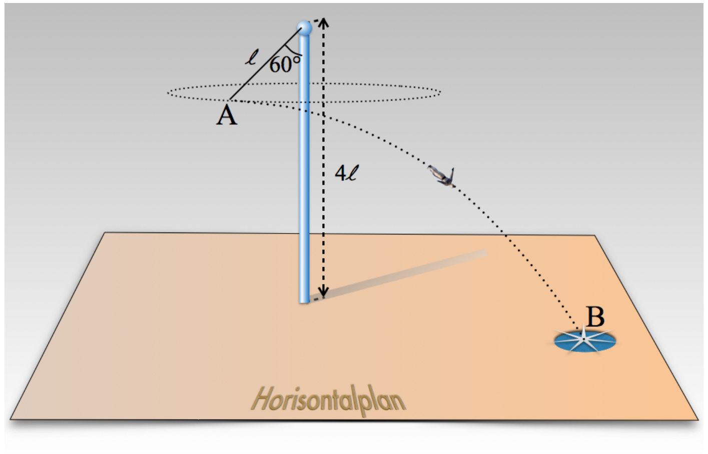
$$-\frac{mv_0^2}{F_\mathrm{f}}\int_u^0 \frac{v\,\mathrm{d}v}{(v+v_0)^2} = \int_0^d \mathrm{d}x = d \quad \Rightarrow \quad d = \frac{mv_0^2}{F_\mathrm{f}}\int_0^u \frac{v\,\mathrm{d}v}{(v+v_0)^2}$$

SVAR:

$$\boxed{d = \frac{mv_0^2}{F_\mathrm{f}}\int_0^u \frac{v\,\mathrm{d}v}{(v+v_0)^2}}$$

[Partikelrörelse; rörelsemotstånd; variabelbyte i NII.]

5.



Den kända våghalsen Berit Grahnat-Jansson uppträder på cirkus med ett döds-föraktande hopp ned i en liten bassäng nedsänkt i marken, som figuren antyder.

Innan hoppet snurrar Berit först några varv med konstant fart kring en vertikal mast av höjden 4ℓ.

Berit hänger därvid i en lätt, otänjbar lina av längden ℓ, fäst i mastens topp. Under Berits rotationsrörelse är vinkeln 60° mellan linan och masten; se figuren.

I ett visst läge A släpper Berit linan och faller utan luftmotstånd i en kastparabel mot bassängens mittpunkt B. Tyngdkraftaccelerationen är g.

Beräkna Berits *fart* i nedslagsögonblicket. [Den beror *ej* av Berits massa!] (5 p)

[Cirkelrörelse för partikel; energikonservering.]

LÖSNINGSSKISS:

När Berit snurrar runt masten har hon en fart v_A som kan beräknas mha Newtons andra lag i specialfallet cirkulär rörelse; se FS:

$$\begin{aligned}
\text{Cirkelrörelse:}\quad & a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{v_A^2}{\ell \sin 60^\circ} \\
\text{NII } \rightarrow:\quad & S \sin 60^\circ = m\, a_n \quad (\text{där } S \text{ är linkraften}) \\
\text{NII } \uparrow:\quad & S \cos 60^\circ - mg = 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad g \tan 60^\circ = \frac{v_A^2}{\ell \sin 60^\circ} \quad \Rightarrow \quad v_A = \sqrt{\frac{3g\ell}{2}}$$

Sätt potentiella energin i tyngdkraftfältet till noll i det plan som är markerat som horisontalplan i figuren. Inget luftmotstånd, så energin är bevarad för Berit:

$$\text{Energikonservering:}\quad V_B + T_B = V_A + T_A$$

$$V_A = mg\,(4\ell - \ell \cos 60^\circ) = \frac{7}{2} mg\ell$$

$$V_B = 0$$

$$T_A = \frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} m \frac{3g\ell}{2} = \frac{3}{4} mg\ell$$

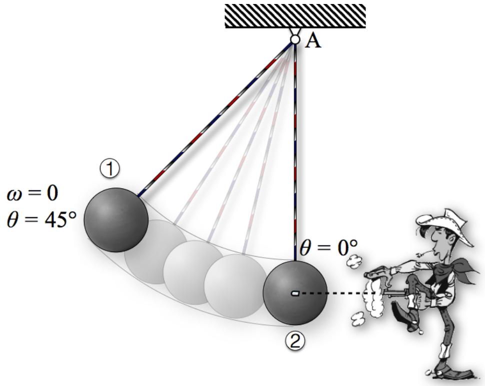
$$T_B = \frac{1}{2} m v_B^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} m v_B^2 = \left(\frac{7}{2} + \frac{3}{4}\right) mg\ell \quad \Rightarrow$$

SVAR:

$$\boxed{v_B = \sqrt{\frac{17}{2} g\ell}}$$

6. En känd mästerskytt utsätts för ett attentat av en yrkeskriminell liga. De tänker få honom ur balans genom att knuffa omkull honom med hjälp av en stor pendel.



I ett obevakat ögonblick släpper ligan därför ett stort hängande homogent träklot, av massan m och radien R, från vila i det läge som betecknas ① i figuren. Klotet är medelst en lätt, otänjbar lina av längden $5R$ fäst i en fix punkt A.

θ betecknar i figuren vinkeln mellan linan och lodriktningen, och ω betecknar den momentana vinkelhastigheten i klotets rotation kring A.

Mästerskytten anar dock oråd och reagerar blixtsnabbt! När klotet når läge ② avfyrar han horisontellt en välriktad kula av massan m_0.

Kulan tränger in och fastnar mitt i träklotet, och *därvid stannar klotet*!

Bestäm vilken fart mästerskyttens kula hade ögonblicket innan den träffade träklotet.

(5p)

LÖSNINGSSKISS:

Sätt potentiella energin för klotet i tyngdkraftfältet i läge ② till $V_2 = 0$. I läge ① är då potentiella energin för klotet

$$V_1 = mg(6R - 6R/\sqrt{2}) = 6mgR(\sqrt{2}-1)/\sqrt{2}$$

I läge ② är klotets hastighet horisontell, och innan klotet träffas av kulan är klotets fart v_1 given av energilagen:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = 6mgr(\sqrt{2}-1)/\sqrt{2}, \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{\frac{6gh(2-\sqrt{2})}{m}}$$

När kulan träffar klotet går en del energi åt till deformation och uppvärmning av kula och klot, men rörelsemängden för systemet kula+klot bevaras. Om kulans fart i början av inträngningsförloppet är u, har vi alltså

$$mv_1 - m_1 u = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{m}{m_1}\sqrt{\frac{6gh(2-\sqrt{2})}{m}}$$

SVAR:

$$\frac{m}{m_1}\sqrt{\frac{6gh(2-\sqrt{2})}{m}}$$

[*Rörelsemängdskonservering;* energikonservering.]