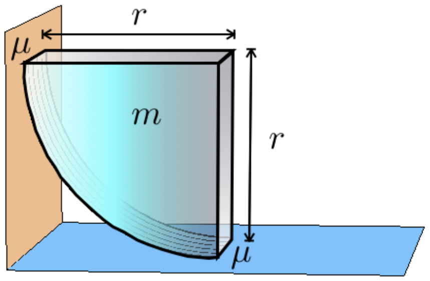
LÖSNINGSSKISSER

till

TENTAMEN TME011 Mekanik, 2014-01-13

1. 

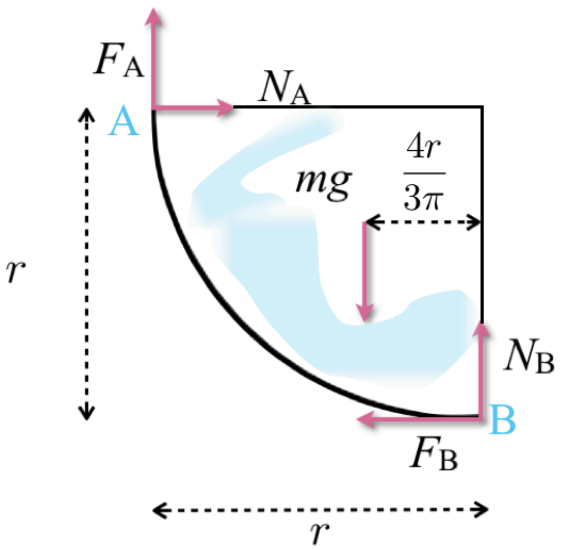
En homogen kropp har formen av en fjärdedel av en (ändlig och massiv) cirkulär cylinder. (Se figuren.) Kroppen ställs på ett horisontellt golv så att den stöder mot en vertikal vägg enligt figuren.

Friktionskoefficienten är μ både vid kontakten mellan kropp och golv och mellan kropp och vägg.

Antag att kroppen är i jämvikt, men precis på gränsen till glidning (vid kontakten både mot vägg och mot golv). Bestäm **en ekvation för friktionskoefficienten**.

Du behöver **inte lösa** ekvationen, men den **får inte innehålla några andra variabler än** μ. (5 p)

Frilägg kroppen. Tyngdpunktens läge för kroppen fås ur formelsamlingen.



$$\uparrow: \quad N_A - F_B = 0$$
$$\rightarrow: \quad F_A + N_B - mg = 0$$
$$\overset{\curvearrowleft}{\mathrm{B}}: \quad -F_A r - N_A r + mg\frac{4r}{3\pi} = 0$$

Fullt utvecklad friktion i A och B:

$$F_A = \mu N_A, \quad F_B = \mu N_B$$

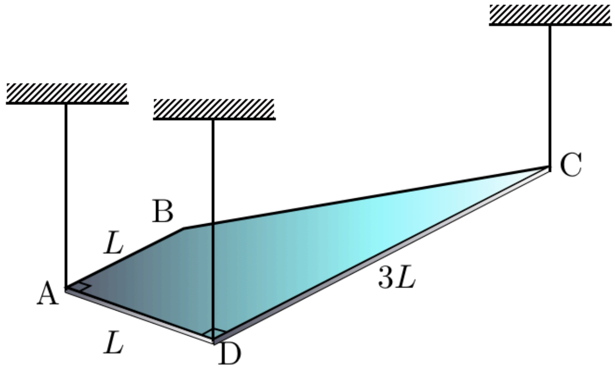
Eliminera alla variabler utom μ. Detta ger en andragradsekvation för friktions-koefficienten.

Svar:

$$\mu^2 + \frac{3\pi}{3\pi - 4}\mu - \frac{4}{3\pi - 4} = 0$$

■

2.

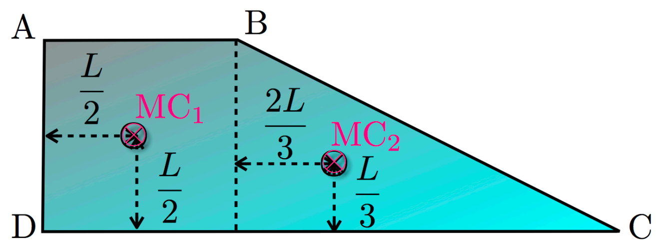


En tunn homogen plåt ABCD har massan m och mått enligt figuren. (Märk att vinklarna DAB och CDA båda är räta.) Plåten hålls i horisontellt läge av tre vertikala otänjbara linor som figuren visar.

Bestäm de tre linkrafternas belopp.

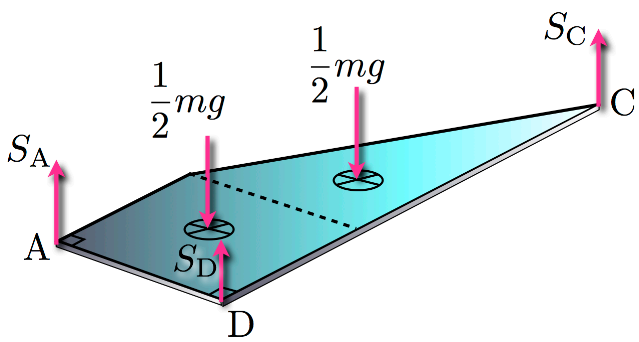
(5 p)

Dela upp tyngdkraften i två lika delar, verkande i MC_1 respektive MC_2 i vidstående figur. (Lika delar, eftersom arean av triangeln är densamma som arean av kvadraten!)



Frilägg plåten enligt den andra figuren.

Kraftjämvikt i vertikalled, samt momentjämvikt kring axlarna AD respektive DC ger sedan:



$$\begin{cases} \uparrow: & S_A + S_C + S_D - mg = 0 \quad (1) \\ \overset{\frown}{AD}: & S_C \cdot 3L - \frac{1}{2}mg \cdot \frac{L}{2} - \frac{1}{2}mg \cdot \left(L + \frac{2L}{3}\right) = 0 \quad (2) \\ \overset{\frown}{DC}: & S_A \cdot L - \frac{1}{2}mg \cdot \frac{L}{2} - \frac{1}{2}mg \cdot \frac{L}{3} = 0 \quad (3) \end{cases}$$

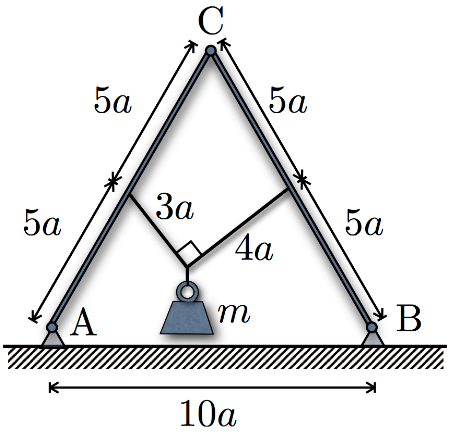
Ekv. (3) ger S_A och ekv. (2) ger S_C. Detta insatt i ekv. (1) ger sedan S_D.

Svar:

$$S_A = \frac{5}{12}mg, \quad S_C = \frac{13}{36}mg, \quad S_D = \frac{2}{9}mg.$$

■

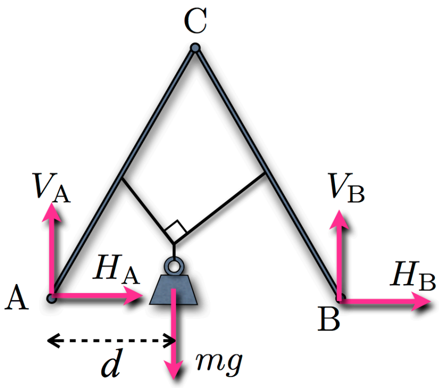
3.



Två lätta stänger AC och BC är sammanfogade med en momentfri led i C. I punkterna A och B är stängerna fästa vid ett fixt horisontalplan m h a momentfria leder. En massa av storleken *m* är upphängd medelst en lätt otänjbar lina, fäst vid stängernas mittpunkter som figuren visar.

Bestäm den horisontella och den vertikala reaktionskraften på stängerna i infästningspunkterna A och B. (5 p)

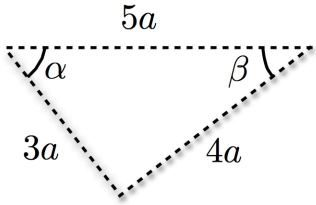
Frilägg först hela systemet (massan tillsammans med lina och stänger). Inför reaktionskrafterna i A och B enligt figuren härintill. (Inför också avståndet *d*, som vi strax skall bestämma.)



Kraft- och momentjämvikt ger:

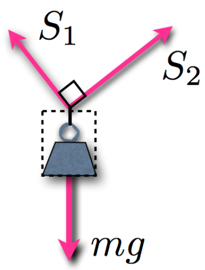
$$\begin{cases} \uparrow: & V_A + V_B - mg = 0 \quad (1) \\ \rightarrow: & H_A + H_B = 0 \quad (2) \\ \overset{\frown}{A}: & V_B \cdot 10a - mg \cdot d = 0 \quad (3) \end{cases}$$

Frilägg sedan massan. Inför linkrafterna S_1 och S_2 enligt figuren. Litet geometri:



$$\sin\alpha = \frac{4}{5} = \cos\beta$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{5} = \sin\beta$$



(Trekraftsystem. Ingen idé att räkna på momentjämvikt.)

så *d* i ekvation (3) fås som:

$$d = 5a\cos 60° + 3a\cos\alpha = 43a/10.$$

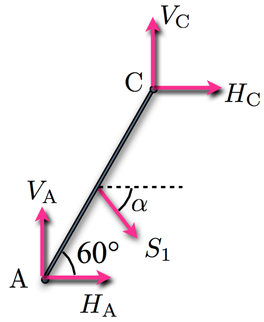
Kraftjämvikt för massan ger:

$$\begin{cases} \uparrow: & S_1 \sin\alpha + S_2 \sin\beta - mg = 0 \\ \rightarrow: & -S_1\cos\alpha + S_2\cos\beta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_1 = \frac{4}{5}mg, \; S_2 = \frac{3}{5}mg.$$

(Fortsättning på nästa sida.)

Frilägg slutligen en av stängerna, t ex AC, och tag momentjämvikt kring C (för att slippa behöva bestämma tvångskrafterna i C). Vinkeln mellan linkraften och stången är $60° + \alpha$. Alltså har vi



$$\overset{\curvearrowleft}{\mathrm{C}}: \quad H_A \cdot 10a \sin 60° - V_A \cdot 10a \cos 60° + S_1 \cdot 5a \sin(60° + \alpha) = 0$$

Sätter vi nu in värden för S_1 och α enligt ovan, så ger det den fjärde ekvationen för de fyra obekanta H_A, V_A, H_B, V_B. Tillsammans med (1), (2) och (3) ovan har vi tillräckligt med ekvationer för att bestämma alla obekanta.

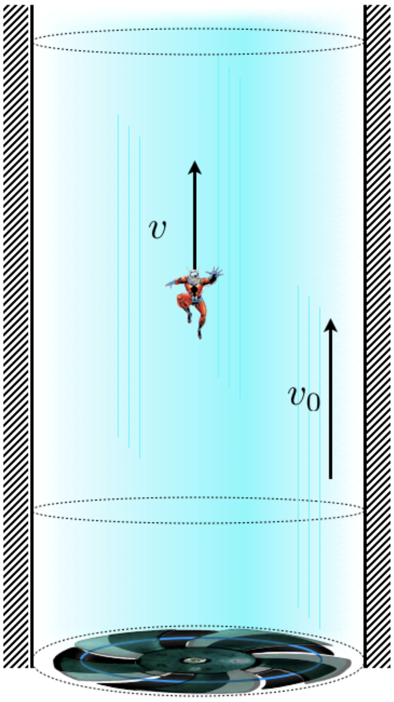
Svar:

$$F_A = \frac{21}{40} mg, \quad F_B = \frac{19}{40} mg,$$

$$H_B = -H_A = \frac{\left(180 - 41\sqrt{3}\right)}{600} mg.$$

■

4.



Ant-Man är i knipa!.

Superhjälten *Ant-Man*, som kan göra sig liten som en myra, har av en superskurk lurats in i ett vertikalt ventilationsrör. Luften strömmar uppåt i röret med den konstanta farten v_0. Initialt har *Ant-Man* samma vertikala hastighet som luftströmmen, men efter en stund vänder hans rörelse och han börjar falla nedåt (i riktning mot den dödliga fläkten!).

Ant-Man är under hela rörelsen utsatt för en vertikal kraft från luftströmmen, av storleken $F = b(v_0 – v)$. Här är b en konstant och v är *Ant-Mans* vertikala hastighetskomponent (positiv uppåt). I sin myr-skepnad har *Ant-Man* massan m.

a) Bestäm ett villkor på m för att *Ant-Man* verkligen skall börja falla efter en stund (och inte bara fortsätta uppåt eller bara sväva utan att falla). (2 p)
b) Bestäm hur lång sträcka *Ant-Man* rört sig uppåt i röret innan rörelsen vänder. (3 p)

(a) För att *Ant-Man* skall kunna börja falla, måste han först passera hastigheten noll. (Han börjar ju med den positiva hastigheten v_0 uppåt.) Och för att han i detta vändläge verkligen skall börja röra sig nedåt, måste han i vändläget ha en nedåtriktad acceleration. NII ger då att vi måste ha att $bv_0 – mg < 0$.

Svar (a): $m > b\, v_0/g$.

(b) Antag alltså att villkoret i (a) är uppfyllt. NII ger

$$b\,(v_0 - v) - mg = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$$

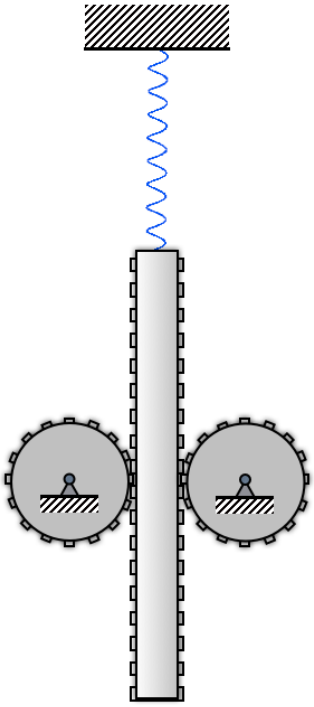
om vi räknar sträckan s positiv uppåt från startpunkten, och utnyttjar en välkänd omskrivning av accelerationen. Alltså får vi

$$s_1 = \int_0^{s_1} \mathrm{d}s = \int_{v_0}^{0} \frac{m\,v\,\mathrm{d}v}{b\,(v_0 - v) - mg}$$

där s_1 är den sökta sträckan. En titt t ex i (integraltabellerna i) Beta ger slutligen att sträckan ges av nedanstående

Svar (b): $\dfrac{m\,v_0}{b} + \dfrac{m^2\,g}{b^2}\left(1 - \dfrac{b\,v_0}{m\,g}\right)\ln\left(1 - \dfrac{b\,v_0}{m\,g}\right)$

■

5. 

En kuggstång med massan m kan röra sig vertikalt mellan två kugghjul, vilka kan rotera friktionsfritt kring var sin horisontell axel. Båda kugghjulen är formade som homogena cylindrar, vardera med massan m och radien R. Kuggstången hänger i en linjär fjäder med fjäderkonstanten k.

Kuggstången sätts i rörelse så att den passerar systemets jämviktsläge med farten v_1.

Hur lång sträcka rör sig stången innan den vänder? (5 p)

Använd energikonservering! Om stången rör sig med farten v så roterar kugghjulen med vinkelhastigheten $\omega = v/R$. Kugghjulen har vardera masströghetsmomentet $I = mR^2/2$ m a p sitt masscentrum. Totala kinetiska energin är alltså

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + 2\cdot\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mR^2\frac{v^2}{R^2} = mv^2$$

Låt δ_0 beteckna fjäderns förlängning i jämviktsläget. I jämviktsläget är fjäderkraften lika stor som (och motriktad) tyngdkraften, så

$$k\delta_0 = mg \quad \Rightarrow \quad \delta_0 = \frac{mg}{k}$$

Potentiella energin består av två bidrag, fjäderpotentialen och tyngdkraftspotentialen:

$$V = \frac{1}{2}k\delta^2 + mgh$$

där δ är aktuell fjäderförlängning och h är kuggstångens aktuella masscentrumshöjd över en godtycklig noll-nivå. Vi väljer nollnivån så att $h = -\delta$. I startläget är $v = v_1$ och $\delta = \delta_0$. I slutläget är $v = 0$ och $\delta = \pm s + \delta_0$, där s betecknar det sökta sträckan som stången rört sig. (Tecken beror på om stången passerar jämviktsläget på väg upp eller ner.) Vi får

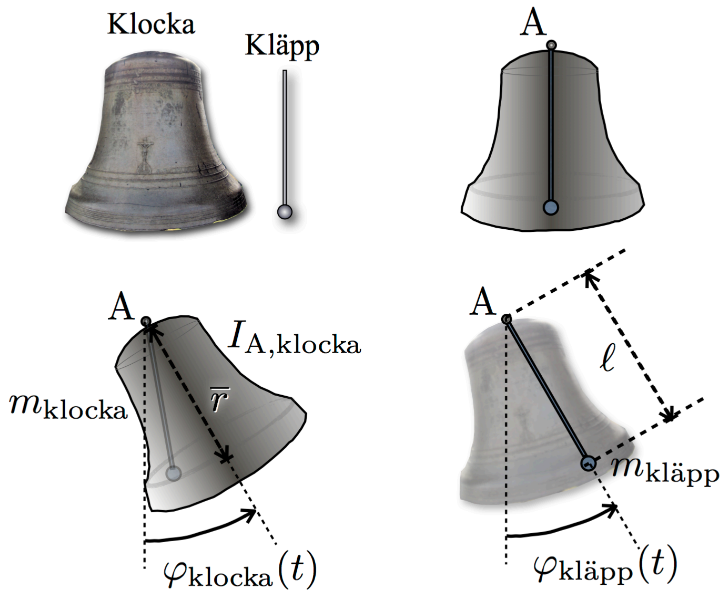
$$0 = \Delta(T+V) = m0^2 + \frac{1}{2}k(\pm s + \delta_0)^2 - mg(\pm s + \delta_0) - \left(mv_1^2 + \frac{1}{2}k\delta_0^2 - mg\delta_0\right) \quad \Rightarrow$$

$$ks^2 - 2mv_1^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{Svar: } s = \sqrt{\frac{2m}{k}}\,v_1}$$

■

6. En anordning för att störa sovande studenter har placerats i ett högt torn intill några studenthem.

Anordningen består av en upp-och-ned-vänd metallskål, kallad "klocka", och en matematisk pendel, kallad "kläpp". Båda dessa delar kan svänga friktionsfritt kring en gemensam horisontell axel genom punkten A; se figuren.



Kläppen består av en punktmassa (partikel) av massan $m_{\mathrm{kläpp}}$, som medelst en lätt stel stång hålles på avståndet ℓ från axeln. Kläppens vinkelutslag från jämviktsläget vid tiden t kallar vi $\varphi_{\mathrm{kläpp}}(t)$.

Själva klockan (den upp-och-ned-vända skålen) har massan m_{klocka} och masströghetsmomentet $I_{\mathrm{A,klocka}}$ m a p axeln genom A. Dess tyngdpunkt befinner sig på avståndet $\overline{r}$ från axeln. Klockans vinkelutslag från dess jämviktsläge betecknar vi med $\varphi_{\mathrm{klocka}}(t)$.

Anordningen bringas att svänga genom att släppas från vila i ett läge där $\varphi_{\mathrm{klocka}}(0) = \varphi_{\mathrm{kläpp}}(0) = \varphi_0 > 0$, men till operatörens (kallad "klockaren") stora förtret slår kläppen aldrig mot klockans insida, eftersom båda, oberoende av hur stor φ_0 väljes, svänger helt i fas! Studenterna sover alltså lugnt vidare utan att störas av någon klockklang.

Ställ upp ett samband bland $m_{\mathrm{kläpp}}$, ℓ, $I_{\mathrm{A,klocka}}$, m_{klocka}, $\overline{r}$ och tyngdkraftaccelerationen g, som måste råda om de båda svängningarna alltid skall vara helt lika. (5p)

"I knew you like a bell that wouldn't sound"
– I. Saravanjo

Rörelseekvationerna för klocka respektive kläpp är rörelsemomentekvationerna m a p upphängningspunkten A:

$$I_{\mathrm{A,klocka}}\ddot{\varphi}_{\mathrm{klocka}} = -m_{\mathrm{klocka}} g\,\overline{r}\,\sin\varphi_{\mathrm{klocka}}, \qquad m_{\mathrm{kläpp}}\,\ell^2\ddot{\varphi}_{\mathrm{kläpp}} = -m_{\mathrm{kläpp}} g\,\ell\,\sin\varphi_{\mathrm{kläpp}}$$

dvs

$$\ddot{\varphi}_{\mathrm{klocka}} + \frac{m_{\mathrm{klocka}} g\,\overline{r}}{I_{\mathrm{A,klocka}}}\sin\varphi_{\mathrm{klocka}} = 0, \qquad \ddot{\varphi}_{\mathrm{kläpp}} + \frac{g}{\ell}\sin\varphi_{\mathrm{kläpp}} = 0$$

Båda svängningarna startar från vila med utslaget φ_0. Om rörelseekvationerna skall beskriva samma rörelse, måste koefficienterna vara desamma i båda ekvationerna:

$$\frac{m_{\mathrm{klocka}} g\,\overline{r}}{I_{\mathrm{A,klocka}}} = \frac{g}{\ell}.$$

Alltså har vi vårt Svar: $\boxed{\ell = \dfrac{I_{\mathrm{A,klocka}}}{m_{\mathrm{klocka}}\overline{r}}}$

■