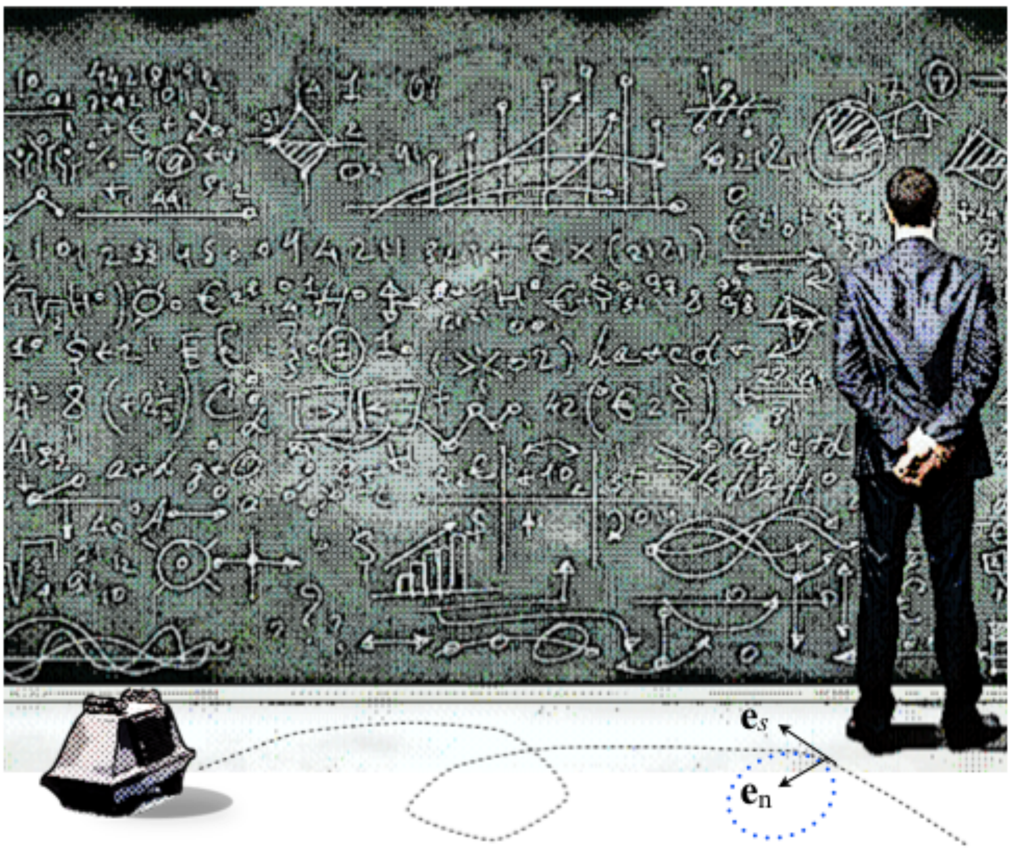
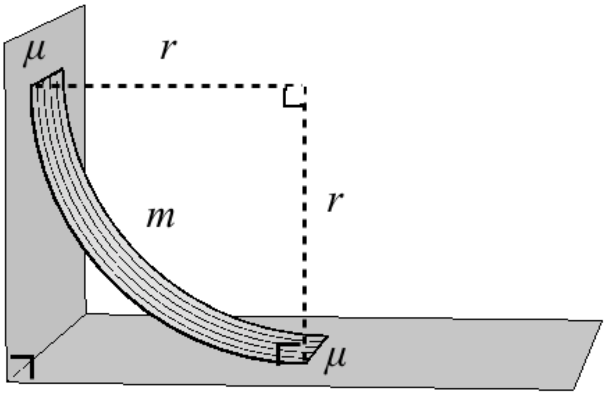
LÖSNINGSSKISSER

till

TENTAMEN TME011 Mekanik, 2013-10-21



1.



En tunn homogen plåt har böjts till en kvartscirkulär cylinderyta som figuren antyder.

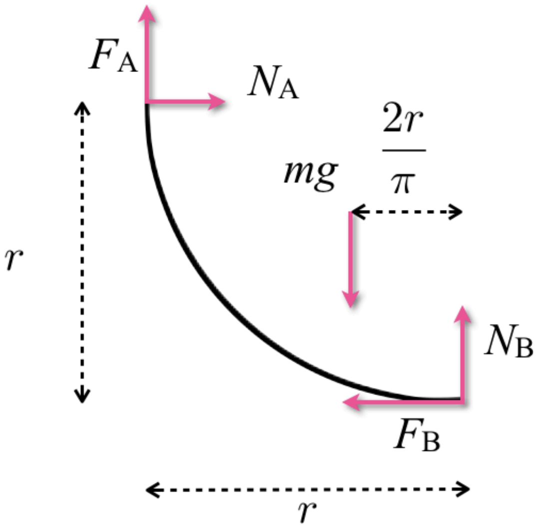
Plåten lutas mot en vägg enligt figuren.

Friktionskoefficienten är μ både vid kontakten mellan plåt och golv och mellan plåt och vägg.

Antag att plåten är i jämvikt, men precis på gränsen till glidning (i plåtens båda ändar). Bestäm **en ekvation för friktionskoefficienten**.

Du behöver **inte lösa** ekvationen, men den **får inte innehålla några andra variabler än** μ. (5 p)

Frilägg plåten. Tyngdpunktens läge för plåten fås ur formelsamlingen.



$$\uparrow: \quad N_A - F_B = 0$$

$$\rightarrow: \quad F_A + N_B - mg = 0$$

$$\overset{\curvearrowleft}{B}: \quad -F_A r - N_A r + mg\frac{2r}{\pi} = 0$$

Fullt utvecklad friktion i A och B:

$$F_A = \mu N_A, \quad F_B = \mu N_B$$

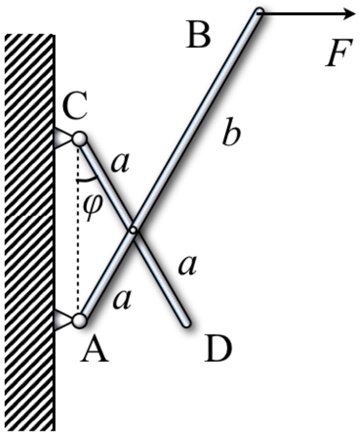
Eliminera alla variabler utom μ. Detta ger en andragradsekvation för friktionskoefficienten, med *en* positiv rot.

Svar:

$$\mu^2 + \frac{\pi\mu}{\pi - 2} - \frac{2}{\pi - 2} = 0$$

■

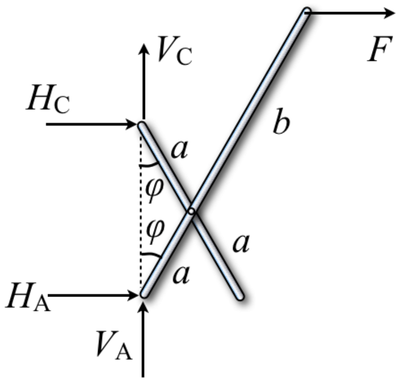
2.



Två lätta stänger AB och CD är sammanfogade med en momentfri led mitt på CD, som figuren antyder. I A och C är stängerna fästa vid en orörlig vägg m h a momentfria leder. I B angriper en horisontell kraft riktad rakt ut från väggen.

Bestäm den horisontella och den vertikala reaktionskraften på stången AB i infästningspunkten A. (5 p)

Frilägg ABCD:



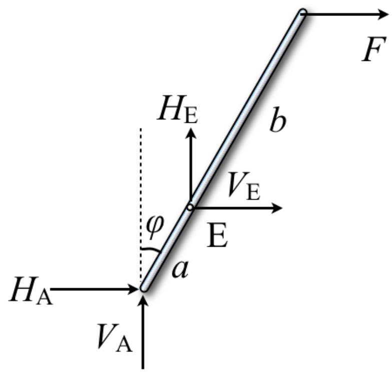
$\rightarrow$: $$H_A + H_C + F = 0 \quad (1)$$

$\overset{\frown}{\mathrm{A}}$: $$F\,(a+b)\,\cos\varphi + H_C \cdot 2a\,\cos\varphi = 0 \quad (2)$$

(Vi behöver inte alla jämviktsekvationerna; se nedan!)
(1) och (2) ger tillsammans att

$$H_A = F\,\frac{b-a}{2a}$$

Frilägg AB:



$\overset{\frown}{\mathrm{E}}$: $$F\,b\,\cos\varphi - H_A \cdot a\,\cos\varphi + V_A\,a\,\sin\varphi = 0 \quad (3)$$

Sätt in uttrycket för H_A i ekvation (3) så fås V_A.

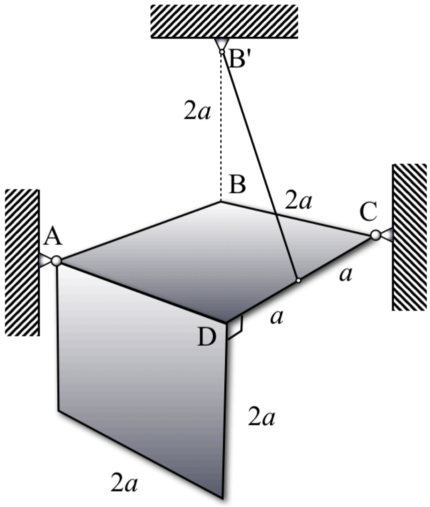
Svar:

$$H_A = F\,\frac{b-a}{2a}$$

$$V_A = -F\,\frac{b+a}{2a}\,\cot\varphi$$

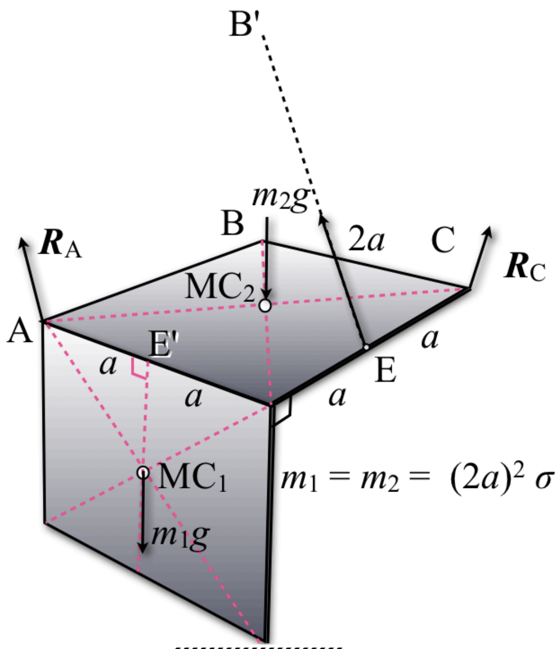
■

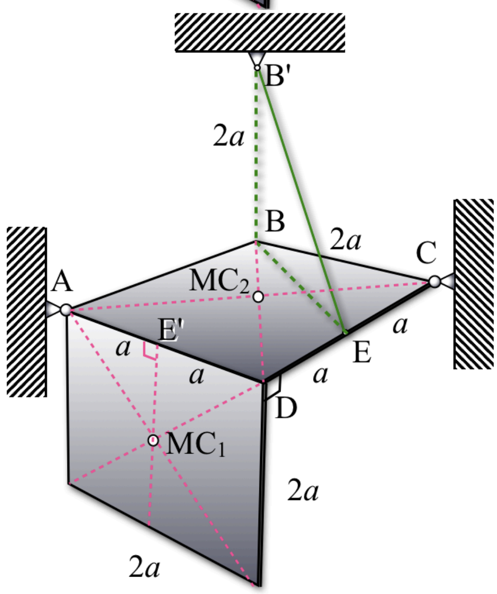
3.



Två tunna homogena kvadratiska plåtar av ytdensiteten σ och med sidlängden $2a$ har svetsats ihop längs AD, i rät vinkel mot varandra, enligt figuren. Plåten ABCD hålls i **horisontellt** läge m h a fästen i A och C samt en lina från en punkt B' i taket till mittpunkten på sidan CD. Plåten ABCD kan rotera friktionsfritt runt axeln AC. Punkten B ligger lodrätt under B'.

Bestäm linkraftens belopp. (5 p)





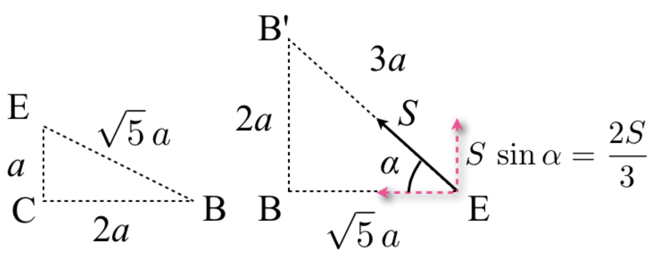
Frilägg hela "plåtsystemet". Tyngdkraften på ABCD angriper i en punkt MC_2 på axeln AC och har alltså inget moment m a p AC. Tyngdkraften på den andra plåten angriper i MC_1 i figuren, och kan flyttas längs sin verkningslinje till punkten E'. Avståndet från E' till axeln AC är

$$a/\sqrt{2}$$

Linkraften S angriper i en punkt E som också ligger på detta avstånd från axeln. Eftersom bara två krafter utövar något moment m a p AC ger momentjämvikt m a p AC direkt att

$$\overbrace{(2a)^2\sigma g}^{m_2 g}\ \overbrace{\frac{a}{\sqrt{2}}}^{\text{hävarm}} - \overbrace{\frac{2S}{3}}^{\substack{\text{vert komp}\\ \text{linkraften}}}\ \overbrace{\frac{a}{\sqrt{2}}}^{\text{hävarm}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \text{Svar:} \quad S = 6\,a^2\sigma g$$



■

(Alt. använd kryssprodukter.)

4. 

Fig. a) Uppåt.

Fig. b) Nedåt.

Vid en cirkusföreställning skjuts den mänskliga kanonkulan Berit Granath-Jansson rakt uppåt med utgångsfarten v_0. Låt v_z vara z-komponenten av Berits hastighetsvektor, där vi låter z-axeln peka lodrätt uppåt. Hennes massa är m. Tyngdkraftsaccelerationen är g.

Luftmotståndet som Berit möter är en kraft, som är av storleken Cv_z^2 och motriktad hennes hastighetsvektor. C är en konstant.

a) Bestäm ett integraluttryck för den maximala höjd $z_{\max}$ som Berit når under sin färd. (2 p)

b) Beräkna integralen analytiskt. (1 p)

c) Om Berit skulle hoppa från hög höjd (med samma orientering i fallet, fast denna gång med huvudet nedåt) skulle hennes fart efter en stund bli i det närmaste konstant. Hur stor är denna fart, den s k gränsfarten? (2 p)

---

a) Eftersom Berit rör sig uppåt:

$$\text{NII } \uparrow: \quad -mg - Cv_z^2 = m\dot{v}_z$$

Skriv om accelerationen m h a kedjeregeln:

$$-mg - Cv_z^2 = m\, v_z \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}z}$$

"Multiplicera upp dz" och integrera:

$$z_{\max} = \int_0^{z_{\max}} \mathrm{d}z = -\int_{v_0}^{0} \frac{m\, v_z}{mg + Cv_z^2} \mathrm{d}v_z = \int_0^{v_0} \frac{m\, v_z}{mg + Cv_z^2} \mathrm{d}v_z$$

b) *Beta* (eller en enkel variabelsubstitution) ger:

$$\int_0^{v_0} \frac{m\, v_z}{mg + Cv_z^2} \mathrm{d}v_z = \frac{m}{2C} \ln\left(1 + \frac{Cv_0^2}{mg}\right)$$

c) NII ger i detta fall

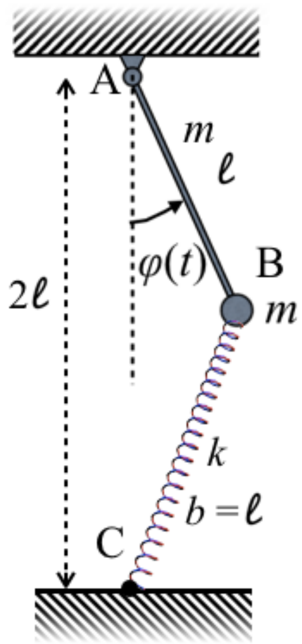
$$-mg + Cv_z^2 = m\dot{v}_z$$

$$v_z = \text{ konstant} = -v_{\mathrm{gr}}$$

Observera plustecknet i rörelseekvationen: Berit rör ju sig nedåt, $v_z = -v_{\mathrm{gr}}$, så luftmotståndet är nu riktat uppåt. Sätt accelerationen = 0, så fås

$$v_{\mathrm{gr}} = \sqrt{\frac{mg}{C}}$$

■

5. 

En pendel bestående av en liten kula B av massan m, fäst i ena änden av en homogen stång av massan m och längden ℓ, kan svänga friktionsfritt kring en punkt A som i figuren. En fjäder med fjäderkonstanten k och ospända längden $b = \ell$, är fäst i B och i en fix punkt C rakt under A. När pendeln hänger rakt ned, är fjädern ospänd.

Om pendeln släppes från vila i horisontellt läge, vad är (beloppet av) dess vinkelhastighet då den passerar jämviktsläget? (5 p)

I begynnelseläget ges kinetisk energi (stång plus partikel) och (summan av tyngdkraftens och fjäderns) potentiella energi av

$$T_{\dot{\varphi}=0} = 0, \quad V_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 2mg\ell + \frac{1}{2}k\left((\sqrt{5}-1)\ell\right)^2$$

Dito vid passagen av jämviktsläget:

$$T_{\dot{\varphi}=-\omega} = \frac{1}{2}\left(m\ell^2 + \frac{1}{3}m\ell^2\right)\omega^2, \quad V_{\varphi=0} = \frac{1}{2}mg\ell + 0$$

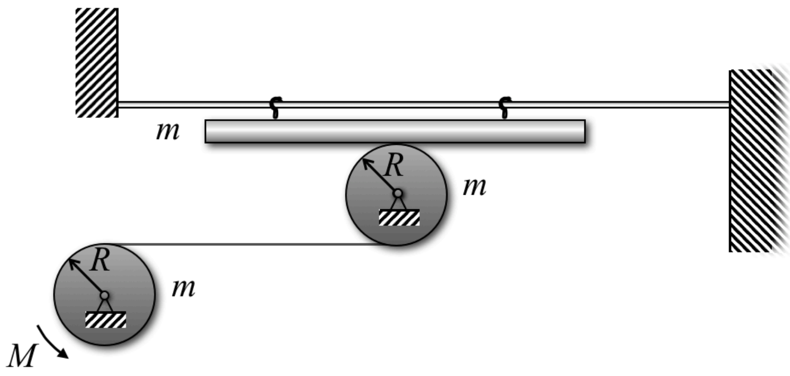
Använd så att den totala mekaniska energin är konserverad (ty vi har inga icke-konservativa krafter på systemet):

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta(T+V) \\ &= \left(\frac{2}{3}m\ell^2\omega^2 + \frac{1}{2}mg\ell\right) - \left(0 + 2mg\ell + \frac{1}{2}k\ell^2(\sqrt{5}-1)^2\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Svar: } \omega = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9g}{\ell} + \frac{6\left(3-\sqrt{5}\right)k}{m}}$$

■

6. Två homogena, cirkulärcylindriska hjul, vardera av massan m och radien R, är förbundna med en otänjbar lina så som figuren visar.



Det vänstra hjulet vrider sig runt sitt centrum och lindar upp linan, som därmed får det högra hjulet att snurra.

En sträv stång ligger an mot det högra hjulet och **ingen glidning förekommer mellan stången och högerhjulet**. Stången kan däremot glida friktionsfritt på en upphängningsanordning; se figuren.

Systemet startar från vila, då ett konstant moment M börjar vrida vänsterhjulet moturs. Efter en stund är stångens hastighet åt vänster lika med v. Hur stor vinkel har då det vänstra hjulet hunnit vrida sig? (5 p)

Lagen för den kinetiska energin säger att $W^{(\mathrm{ik})} = \Delta T$. Det konstanta momentet uträttar under rörelsen arbetet $M\varphi$, där φ är den vinkel det vänstra hjulet har vridit sig. I begynnelseögonblicket är alla hastigheter = 0, så den kinetiska energin är då noll.

I slutet av rörelsen är den kinetiska energin

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + 2\,\frac{1}{2}I\omega^2$$

där ω är vinkelhastigheten för vänstra och (pga den otänjbara linan) högra hjulet. Ingen glidning mellan hjul och stång, så $\omega = v/R$. Formelsamlingen ger tröghetsmomentet för vart och ett av hjulen $I = m\,R^2/2$. Alltså har vi

$$M\varphi = mv^2 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{mv^2}{M}$$

■