Lösningsförslag

---

1. Rörelseekvationen för kroppen ger som vanligt

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

som tillsamman med begynnelsevillkoren $x(0) = A$, $\dot{x}(0) = 0$ ger

$$x(t) = A\cos(\omega t)$$

a) Så

$$|\dot{x}(t)| = \omega A \;\; |-\sin(\omega t)|$$

varför maxvärdet av hastighetens belopp är ωA.

$\boxed{\text{Svar: } \sqrt{\tfrac{k}{m}}A}$

b) Första gången det antas är då $|-\sin(\omega t)| = 1$ för första gången, dvs $t = \pi/(2\omega)$.

$\boxed{\text{Svar: } \tfrac{\pi}{2}\sqrt{\tfrac{m}{k}}}$

c) Vi har

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t)$$

och alltså $T_{\text{max}} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$.

$\boxed{\text{Svar: } \tfrac{1}{2}kA^2}$

---

2. Betrakta den kluvna frukten som "sfärisk kärna av radie R plus halvsfär av fruktkött av radie $3R$ minus halvsfärisk urgröpning för kärnan av radie R". Låt $V_{\circ}$ vara volymen av kärnan, och låt V_{U} vara volymen av halvsfären av fruktkött. Låt V_{u} vara volymen av urgröpningen. Motsvarande massor betecknar vi med $m_{\circ}$, m_{U} resp m_{u}. Totala volymen för den kluvna frukten är $V_{\circ} + V_{\mathsf{U}} - V_{\mathsf{u}}$.

$$V_{\circ} = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad m_{\circ} = \frac{4}{3}\pi R^3\rho_0, \quad \bar{\boldsymbol{r}}_{\circ} = (0, 0, 3R) \quad \text{(pga symmetri)}$$

$$V_{\mathsf{u}} = \frac{2}{3}\pi R^3, \quad m_{\mathsf{u}} = \frac{2}{3}\pi R^3\frac{\rho_0}{2} = \frac{1}{3}\pi R^3\rho_0, \quad \bar{\boldsymbol{r}}_{\mathsf{u}} = \left(0, 0, 3R - \frac{3R}{8}\right) = \left(0, 0, \frac{21R}{8}\right) \quad \text{(pga symmetri och FS)}$$

$$V_{\mathsf{U}} = \frac{2}{3}\pi(3R)^3 = 18\pi R^3, \quad m_{\mathsf{U}} = 18\pi R^3\frac{\rho_0}{2} = 9\pi R^3\rho_0, \quad \bar{\boldsymbol{r}}_{\mathsf{U}} = \left(0, 0, 3R - \frac{3}{8}3R\right) = \left(0, 0, \frac{15R}{8}\right) \quad \text{(pga symmetri och FS)}$$

Alltså: $\bar{x} = \bar{y} = 0$ pga symmetri, och

$$\begin{aligned}
m &= m_{\circ} + m_{\mathsf{U}} - m_{\mathsf{u}} = \frac{4}{3}\pi R^3\rho_0 + 9\pi R^3\rho_0 - \frac{1}{3}\pi R^3\rho_0 = 10\pi R^3\rho_0 \\
\bar{z} &= \frac{1}{10\pi R^3\rho_0}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\rho_0 \cdot 3R + 9\pi R^3\rho_0 \cdot \frac{15R}{8} - \frac{1}{3}\pi R^3\rho_0 \cdot \frac{21R}{8}\right) \\
&= \frac{R}{10}\left(\frac{32}{8} + \frac{135}{8} - \frac{7}{8}\right) = 2R
\end{aligned}$$

Saken är klar!

$\boxed{\text{Svar: } \bar{x} = 0,\ \bar{y} = 0 \text{ och } \bar{z} = 2R}$

---

3. a) Momentet av $\boldsymbol{F}$ med avseende på punkten D är $\mathbf{0}$, ty D ligger på kraftens verkningslinje.

$\boxed{\text{Svar: } \boldsymbol{M}_{\mathrm{D}} = \mathbf{0}}$

b) Momentet av $\boldsymbol{F}$ med avseende på punkten B kan vi räkna ut genom att först flytta $\boldsymbol{F}$ längs sin verkningslinje, så att den angriper i D, och därefter bilda kryssprodukten

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{BD}} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{BD}} \times \left(F \frac{1}{|\boldsymbol{r}_{\mathrm{CD}}|} \boldsymbol{r}_{\mathrm{CD}} \right)$$

Här är

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{BD}} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{D}} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{B}} = \left(0, 0, -\frac{3a}{2}\right), \qquad \boldsymbol{r}_{\mathrm{CD}} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{D}} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{C}} = \left(-a, a, -\frac{3a}{2}\right), \quad |\boldsymbol{r}_{\mathrm{CD}}| = \frac{a\sqrt{17}}{2}$$

så

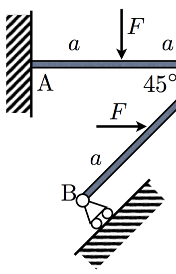
$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{BD}} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{BD}} \times \left(F \frac{1}{|\boldsymbol{r}_{\mathrm{CD}}|} \boldsymbol{r}_{\mathrm{CD}} \right) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & -3a/2 \\ -2F/\sqrt{17} & 2F/\sqrt{17} & -3F/\sqrt{17} \end{vmatrix} = \frac{3aF}{\sqrt{17}}(1, 1, 0)$$

$\boxed{\text{Svar: } \boldsymbol{M}_{\mathrm{B}} = \frac{3aF}{\sqrt{17}}(1, 1, 0)}$

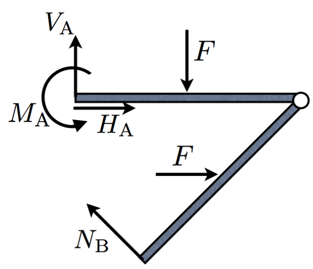
c) Momentet av $\boldsymbol{F}$ med avseende på linjen λ är 0, ty verkningslinjen skär λ.

$\boxed{\text{Svar: } M_{\lambda} = 0}$

4.



Frilägg först hela systemet av stänger som i figuren till höger. Jämviktsekvationerna blir:

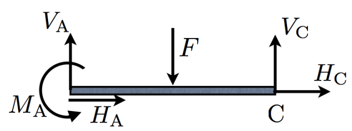


$$\uparrow: \quad V_{\mathrm{A}} - F + \frac{1}{\sqrt{2}} N_{\mathrm{B}} = 0 \tag{1}$$

$$\rightarrow: \quad H_{\mathrm{A}} + F - \frac{1}{\sqrt{2}} N_{\mathrm{B}} = 0 \tag{2}$$

$$\overset{\frown}{\mathrm{A}}: \quad M_{\mathrm{A}} - (2a - \sqrt{2}a) N_{\mathrm{B}} - aF + \frac{a}{\sqrt{2}} F = 0 \tag{3}$$

Frilägg sedan den horisontella stången. (Vi kallar dess högra ände C.) Jämviktsekvationerna blir:



$$\uparrow: \quad V_{\mathrm{A}} - F + V_{\mathrm{C}} = 0 \tag{4}$$

$$\rightarrow: \quad H_{\mathrm{A}} + H_{\mathrm{C}} = 0 \tag{5}$$

$$\overset{\frown}{\mathrm{C}}: \quad M_{\mathrm{A}} + aF - 2aV_{\mathrm{A}} = 0 \tag{6}$$

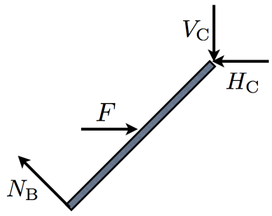
(Fortsättning följer på nästa sida.)

Frilägg slutligen stången BC. Jämviktsekvationerna blir:

$$\uparrow: \quad \frac{1}{\sqrt{2}}N_{\mathrm{B}} - V_{\mathrm{C}} = 0 \tag{7}$$

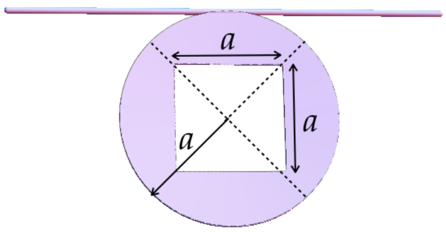
$$\rightarrow: \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}N_{\mathrm{B}} + F - H_{\mathrm{C}} = 0 \tag{8}$$

$$\overset{\curvearrowleft}{\mathrm{C}}: \quad \frac{a}{\sqrt{2}}F - 2aN_{\mathrm{B}} = 0 \tag{9}$$



De fem reaktionskrafterna H_{A}, V_{A}, N_{B}, H_{C}, V_{C} och det enda reaktionsmomentet M_{A} utgör tillsammans sex obekanta. De kan bestämmas t ex ur de sex ekvationerna (1)–(6).

5.



Låt I vara masströghetsmomentet, m a p den angivna axeln, för cirkelskivan minus den utstansade kvadraten, och låt $I_{\bigcirc}$ vara hela cirkelskivans masströghetsmoment m a p samma axel. Låt vidare $I_{\square}$ vara dito för en kvadratisk skiva som motsvarar den utstansade delen. $\overline{I}_{\bigcirc}$ och $\overline{I}_{\square}$ betecknar masströghetsmoment m a p respektive skivas masscentrum, och deras massor betecknar vi $m_{\bigcirc}$ respektive $m_{\square}$. Vi använder först Steiners sats och formelsamlingen (FS ger $\overline{I}_{\bigcirc}$) för att beräkna $I_{\bigcirc}$:

$$\begin{aligned}
I_{\bigcirc} &= \overline{I}_{\bigcirc} + m_{\bigcirc}a^2 = \frac{1}{4}m_{\bigcirc}a^2 + m_{\bigcirc}a^2 = \frac{5}{4}m_{\bigcirc}a^2 \\
m_{\bigcirc} &= \pi a^2 \sigma \\
I_{\bigcirc} &= \frac{5}{4}\pi a^4 \sigma
\end{aligned}$$

FS ger oss $\overline{I}_{\square}$, och Steiners sats ger oss sedan $I_{\square}$:

$$\begin{aligned}
I_{\square} &= \overline{I}_{\square} + m_{\square}a^2 = \frac{1}{12}m_{\square}a^2 + m_{\square}a^2 = \frac{13}{12}m_{\square}a^2 \\
m_{\square} &= a^2 \sigma \\
I_{\square} &= \frac{13}{12}a^4 \sigma
\end{aligned}$$

Då är

$$I = I_{\bigcirc} - I_{\square} = \frac{5}{4}\pi a^4 \sigma - \frac{13}{12}a^4 \sigma = \frac{15\pi - 13}{12}a^4 \sigma$$

$\boxed{\text{Svar: } I = \frac{15\pi - 13}{12}a^4 \sigma}$

---

6. Vi erinrar oss att kastparabeln fås ur

$$y = (v_0 \sin \alpha_0)t - \frac{1}{2}gt^2, \quad x = (v_0 \cos \alpha_0)t$$

genom att eliminera t:

$$\begin{aligned} y &= (v_0 \sin \alpha_0)\frac{x}{(v_0 \cos \alpha_0)} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{(v_0 \cos \alpha_0)}\right)^2 \\ &= x \tan \alpha_0 - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0}x^2 \end{aligned}$$

Vidare minns vi att kastvidden x_{kv} är den större roten till den ekvation som fås genom att sätta sista ledet ovan lika med noll, dvs

$$x_{\mathrm{kv}} = 2\frac{v_0^2}{g} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha_0)$$

a) Två par av utgångsvärden, (v_0, α_0) och (v, α), har alltså samma kastvidd om och endast om

$$v_0^2 \sin(2\alpha_0) = v^2 \sin(2\alpha)$$

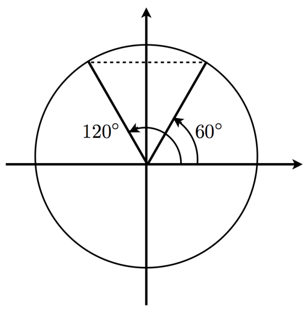
$\boxed{\text{Svar: } v^2 \sin(2\alpha) = v_0^2 \sin(2\alpha_0)}$

b) Eftersom vi har

$$v^2 = v_0^2 \frac{\sin(2\alpha_0)}{\sin(2\alpha)}$$

så letar vi efter vinklar $\beta = 2\alpha$ sådana att $0 < \beta < \pi$ (eftersom $0 < \alpha < \pi/2$) och $\sin \beta > \sin 60^\circ = \sin(\pi/3)$. Som figuren nedan antyder så får vi att endast $\pi/3 < \beta < 2\pi/3$ uppfyller de kraven, dvs endast α i intervallet $30^\circ = \pi/6 < \alpha < \pi/3 = 60^\circ$ duger. För dessa vinklar är alltså

$$\frac{\sin(2\alpha_0)}{\sin(2\alpha)} < 1, \quad \text{så att vi kan välja utgångsfarten } v \text{ med} \quad v^2 = v_0^2 \frac{\sin(2\alpha_0)}{\sin(2\alpha)} < v_0^2$$



$\boxed{\text{Svar: } 30^\circ < \alpha < 60^\circ}$

7. a) Använd att rörelsemängdsmomentet kring den vertikala axeln är konserverat. (Inget moment m a p denna axel från de yttre krafterna.) Alltså

$$I_{\text{kon}}\omega_0 + 3mR^2\omega_0 = I_{\text{kon}}\omega_1 + 0$$

Ur FS ser vi att $I_{\text{kon}} = \frac{3}{10}mR^2$. Alltså

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{\frac{3}{10}mR^2 + 3mR^2}{\frac{3}{10}mR^2} = 11$$

$\boxed{\text{Svar: } \frac{\omega_1}{\omega_0} = 11}$

b) Energin är också konserverad, så:

$$\frac{1}{2}I_{\text{kon}}\omega_0^2 + \frac{1}{2}3mR^2\omega_0^2 = \frac{1}{2}I_{\text{kon}}\omega_1^2 + \frac{1}{2}3mv^2 - mgH$$

dvs

$$\left(\frac{3}{20}mR^2 + \frac{3}{2}mR^2\right)\omega_0^2 = \frac{3}{20}mR^2(11\omega_0)^2 + \frac{1}{2}3mv_1^2 - mgH$$
$$v_1 = \sqrt{\frac{2gH}{3} - 11\omega_0^2R^2}$$

$\boxed{\text{Svar: } v_1 = \sqrt{\frac{2gH}{3} - 11\omega_0^2R^2}}$

(*Observera att detta också ger ett villkor för att den lilla kroppen alls skall kunna nå till konens spets.*)

---

8. Vi använder energilagen på formen

$$W^{(\text{ik})} = \Delta T + \Delta V$$

Här är

$$W^{(\text{ik})} = \int_0^{s_1}(-cv)\mathrm{d}s = \int_0^{t_1}(-cv)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = -c\int_0^{t_1}(v(t))^2\mathrm{d}t$$
$$\Delta T = 0 - 0$$
$$\Delta V = mg\Delta h = mg\left[-R\cos 30^\circ - (-R\cos 60^\circ)\right] = mg\left[-R\frac{\sqrt{3}}{2} + R\frac{1}{2}\right] = -\frac{mgR}{2}(\sqrt{3}-1)$$

så energilagen ger

$$-c\int_0^{t_1}(v(t))^2\mathrm{d}t = -\frac{mgR}{2}(\sqrt{3}-1)$$

Men integralen av v^2 är precis vad vi behöver för att kunna beräkna tidsmedelvärdet av den kinetiska energin! Vi har:

$$T_{\text{medel}} = \frac{m}{2t_1}\int_0^{t_1}(v(t))^2\mathrm{d}t = \frac{m}{2t_1}\frac{mgR}{2c}(\sqrt{3}-1) = \frac{(\sqrt{3}-1)m^2gR}{4ct_1}$$

$\boxed{\text{Svar: } T_{\text{medel}} = \frac{(\sqrt{3}-1)m^2gR}{4ct_1}}$
