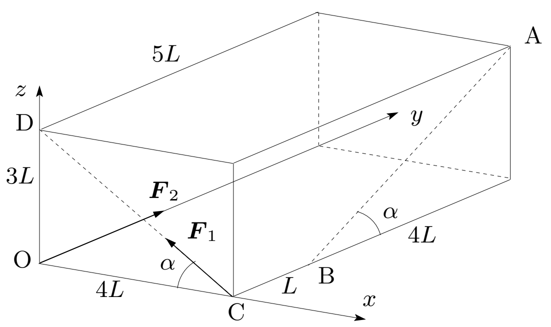
TME010 Mekanik 120412, lösningsförslag

1.



a)

$$
\begin{aligned}
\Sigma \boldsymbol{F} &= \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = \\
&= (-F\cos\alpha,\ 0,\ F\sin\alpha) + (0,\ 2F,\ 0) = \\
&= \left(-\frac{4}{5}F,\ 2F,\ \frac{3}{5}F\right).
\end{aligned}
$$

b)

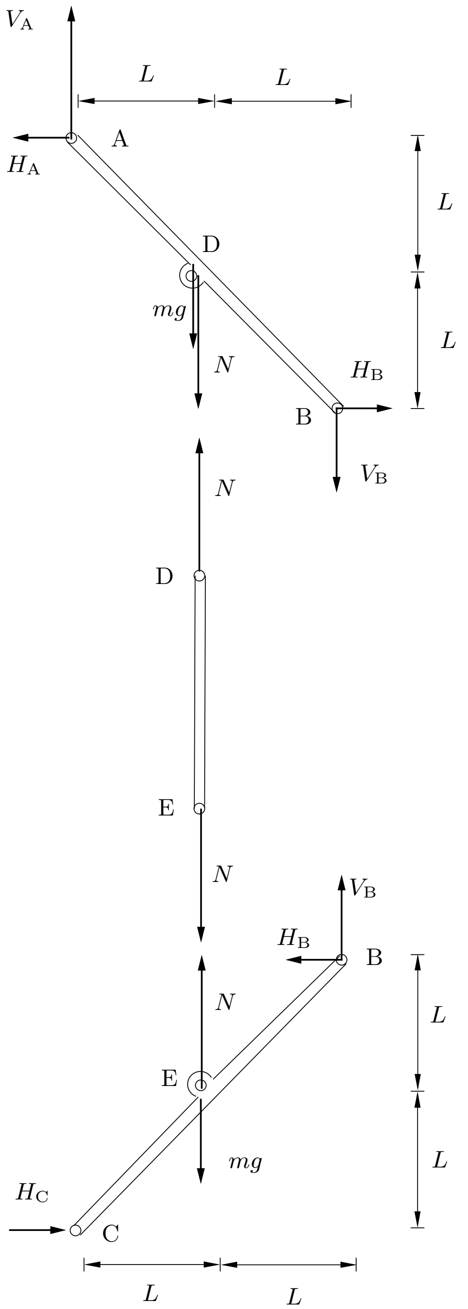
$$
\begin{aligned}
\Sigma \boldsymbol{M}_{\mathrm{A}} &= \overrightarrow{\mathrm{AC}} \times \boldsymbol{F}_1 + \overrightarrow{\mathrm{AO}} \times \boldsymbol{F}_2 = \frac{F}{5}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 0 & -5L & -3L \\ -4 & 0 & 3 \end{vmatrix} + F\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ -4L & -5L & -3L \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \\
&= \frac{FL}{5}(15,\ 12,\ -60).
\end{aligned}
$$

c)

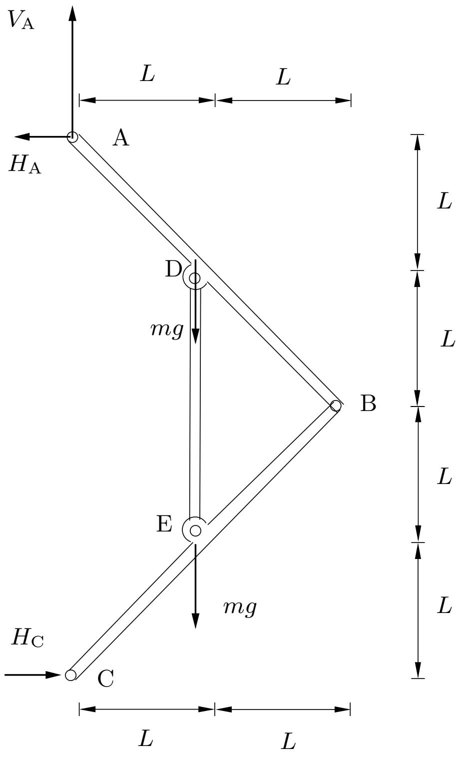
$$
\Sigma M_{\mathrm{AB}} = \Sigma \boldsymbol{M}_{\mathrm{A}} \cdot (0,\ -\cos\alpha,\ -\sin\alpha) = \frac{FL}{5}(15,\ 12,\ -60)\cdot\left(0, -\frac{4}{5},\ -\frac{3}{5}\right) = \frac{132}{25}FL.
$$

2.

b)



a)



c)

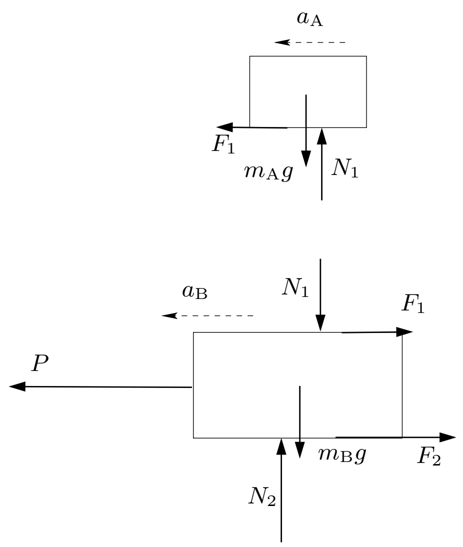
Hela strukturen:

$$\overset{\curvearrowright}{\mathrm{A}} \quad 2mgL - H_{\mathrm{C}} \cdot 4L = 0.$$

Stången BC:

$$\overset{\curvearrowright}{\mathrm{B}} \quad NL - mgL - H_{\mathrm{C}} \cdot 2L = 0.$$

3.



Lådan A:

$$\begin{aligned} \leftarrow \quad & F_1 = m_A a_A, \\ \uparrow \quad & N_1 - m_A g = 0. \end{aligned}$$

Lådan B:

$$\begin{aligned} \leftarrow \quad & P - F_1 - F_2 = m_B a_B, \\ \uparrow \quad & N_2 - N_1 - m_B g = 0. \end{aligned}$$

Glidning i båda kontaktytorna ger att

$$\frac{F_1}{N_1} = \mu, \quad \frac{F_2}{N_2} = \mu.$$

4.

Friktionskraftens arbete är

$$W_{fr} = \Delta T + \Delta V = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} - mgh.$$

5.

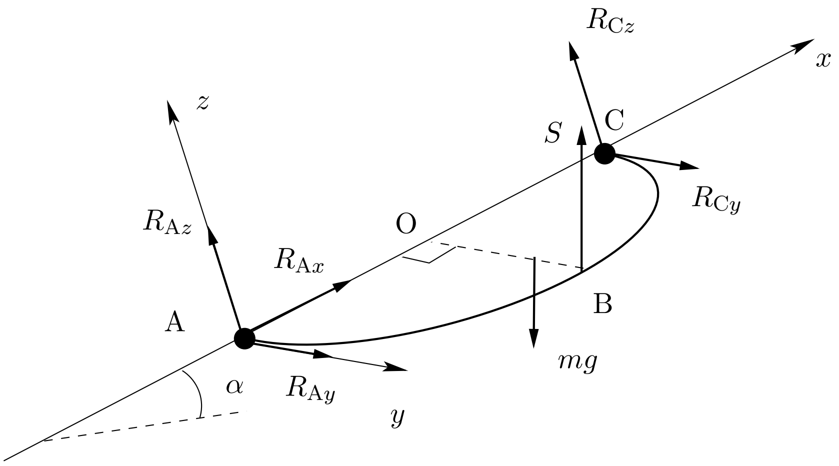
a) Ur formelsamling fås:

$$I_z = \frac{1}{2}mR^2 + \frac{2}{3}mR^2 = \frac{7}{6}mR^2.$$

b) Formelsamling och Steiners sats ger:

$$I_x = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{18}mR^2 + m\left(\frac{2}{3}R\right)^2 + \frac{5}{12}mR^2 + m\left(R + \frac{R}{2}\right)^2 = \cdots = \frac{41}{12}mR^2.$$

6.



Inför ett koordinatsystem med x-axeln längs AC och y-axeln horisontell. Linkraften och tyngdkraften bildar då vinkeln α med z-axeln. Beteckna radien med R.

$$
\begin{aligned}
\Sigma F_x = 0 \qquad & \Rightarrow R_{\mathrm{A}x} - mg\sin\alpha + S\sin\alpha = 0, \\
\Sigma F_y = 0 \qquad & \Rightarrow R_{\mathrm{A}y} + R_{\mathrm{C}y} = 0, \\
\Sigma F_z = 0 \qquad & \Rightarrow R_{\mathrm{A}z} + R_{\mathrm{C}z} - mg\cos\alpha + S\cos\alpha = 0.
\end{aligned}
$$

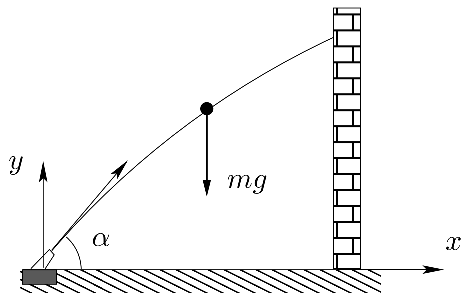
$$
\begin{aligned}
\Sigma \boldsymbol{M}_{\mathrm{A}} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ R & R & 0 \\ S\sin\alpha & 0 & S\cos\alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ R & 2R/\pi & 0 \\ -mg\sin\alpha & 0 & -mg\cos\alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 2R & 0 & 0 \\ 0 & R_{\mathrm{C}y} & R_{\mathrm{C}z} \end{vmatrix} = \\
&= \left(\left(S - \frac{2}{\pi}mg\right)R\cos\alpha,\ (-S+mg)\,R\cos\alpha - 2R_{\mathrm{C}z}R,\ \left(-S + \frac{2}{\pi}mg\right)R\sin\alpha + 2R_{\mathrm{C}y}R\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Lösning av ekvationssystemet ger:

$$
R_{\mathrm{A}x} = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)mg\sin\alpha, \quad R_{\mathrm{A}y} = R_{\mathrm{C}y} = 0, \quad R_{\mathrm{A}z} = R_{\mathrm{C}z} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\right)mg\cos\alpha.
$$

7.

$$\rightarrow \qquad 0 = m\ddot{x},$$
$$\uparrow \qquad -mg = m\ddot{y}.$$



Om begynnelsehastigheten betecknas v_0 fås efter integration och användning av begynnelsevillkoren $\dot{x} = v_0 \cos\alpha$ och $\dot{y} = v_0 \sin\alpha$ för $t = 0$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_0 \cos\alpha, \\ \dot{y} &= -gt + v_0 \sin\alpha. \end{aligned}$$

Ytterligare en integration ger tillsammans med begynnelsevillkoren $x = y = 0$ för $t = 0$

$$\begin{aligned} x &= v_0 t \cos\alpha, \\ y &= -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin\alpha. \end{aligned}$$

Eliminering av t ger:

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} + x \tan\alpha.$$

För att bestämma utgångshastigheten v_0 utnyttjar vi att $y = 3L/4$ då $x = L$ och $\alpha = 45°$:

$$\frac{3}{4}L = -\frac{gL^2}{2v_0^2 \cdot \frac{1}{2}} + L \quad \Rightarrow \quad v_0^2 = 4gL.$$

För godtyckligt α fås då

$$y = -\frac{L}{8\cos^2\alpha} + L\tan\alpha.$$

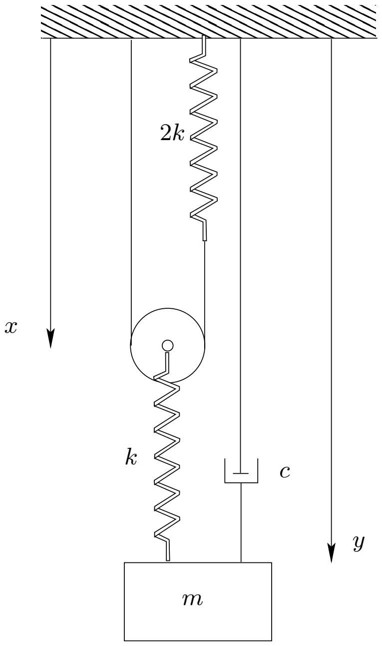
för $x = L$. Maxvärdet av y fås då

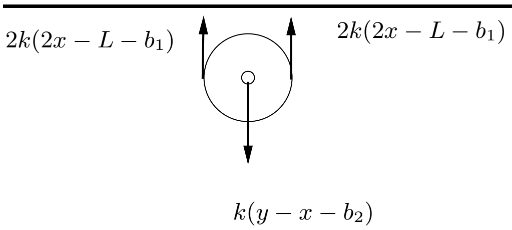
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\alpha} = -\frac{L\sin\alpha}{4\cos^3\alpha} + \frac{L}{\cos^2\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan\alpha = 4 \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}.$$

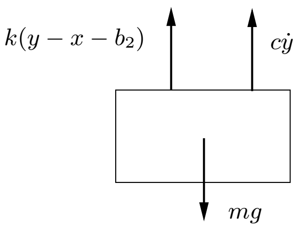
Motsvarande höjd blir då

$$y_{\max} = -\frac{L}{8 \cdot \frac{1}{17}} + 4L = \frac{15}{8}L.$$

8.







Övre fjäderns längd är $2x - L$, där L är linans längd. Fjäderkraften är då $2k(2x - L - b_1)$, där b_1 är fjäderns ospända längd. Den undre fjädern har längden $y - x$ och fjäderkraften $k(y - x - b_2)$, där b_2 är den naturliga längden. Trissan:

$$\uparrow \quad 4k(2x - L - b_1) - k(y - x - b_2) = 0.$$

Undre kroppen:

$$\downarrow \quad mg - k(y - x - b_2) - c\dot{y} = m\ddot{y}.$$

Den första ekvationen ger att

$$x = \frac{y}{9} + \text{konstant}.$$

Insättning i den andra ekvationen ger efter förenkling

$$\ddot{y} + \frac{c}{m}\dot{y} + \frac{8k}{9m}y = \text{konstant}.$$

Karakteristiska ekvationen har rötterna

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{8k}{9m}}.$$

Kritisk dämpning fås då uttrycket under rotmärket är noll, vilket ger

$$c = \frac{1}{3}\sqrt{32km}.$$