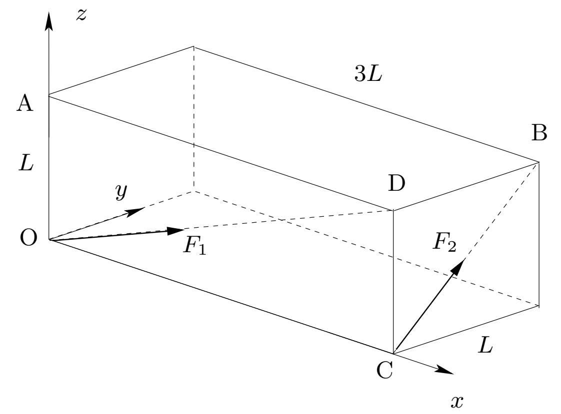
TME010 Mekanik 111213, lösningsförslag

1.

Ekvation	Rätt	Fel
$F = m_1 g + 1$ kN	x	
$M = F(s+1)$		x
$v = at^2/2$		x
$s = \sin(vt)$		x
$F = \frac{m_1^2}{m_1+m_2} g$	x	
$T = m_1 v$		x
$T = 17\,\mathrm{W}$		x
$p = Ft$	x	
$L = 2pR$	x	
$L = M/t$		x

2.



a)

$$\Sigma \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = F_1 \frac{\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|} + F_2 \frac{\overrightarrow{\mathrm{CB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|},$$

där

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OD}} &= (3L,\, 0,\, L) \Rightarrow |\overrightarrow{\mathrm{OD}}| = \sqrt{10}L, \\ \overrightarrow{\mathrm{CB}} &= (0,\, L,\, L) \Rightarrow |\overrightarrow{\mathrm{CB}}| = \sqrt{2}L, \end{aligned}$$

vilket ger

$$\Sigma \boldsymbol{F} = \frac{F_1}{\sqrt{10}}(3,\, 0,\, 1) + \frac{F_2}{\sqrt{2}}(0,\, 1,\, 1)\,.$$

b)

$$\begin{aligned} \Sigma \boldsymbol{M}_{\mathrm{A}} &= \overrightarrow{\mathrm{AO}} \times \boldsymbol{F}_1 + \overrightarrow{\mathrm{AC}} \times \boldsymbol{F}_2 = \frac{F_1}{\sqrt{10}} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 0 & 0 & -L \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \frac{F_2}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 3L & 0 & -L \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{F_1 L}{\sqrt{10}}(0,\, -3,\, 0) + \frac{F_2 L}{\sqrt{2}}(1,\, -3,\, 3). \end{aligned}$$

c)

$$\Sigma M_{\mathrm{AB}} = \Sigma \boldsymbol{M}_{\mathrm{A}} \cdot \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|},$$

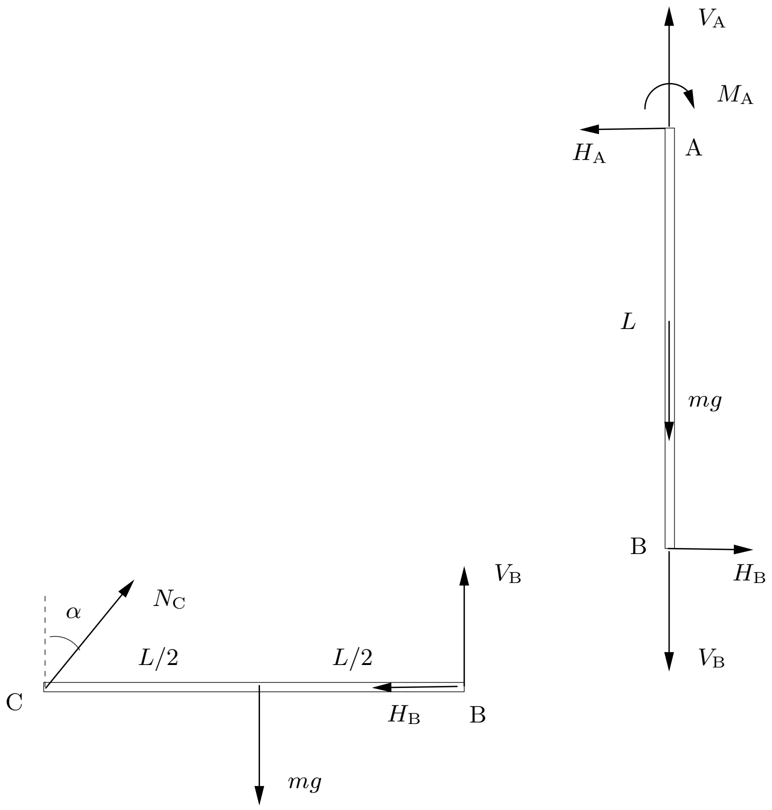
där

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (3L,\, L,\, 0) \Rightarrow |\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{10}L,$$

vilket ger

$$\Sigma M_{\mathrm{AB}} = -\frac{3}{10}F_1 L.$$

3.



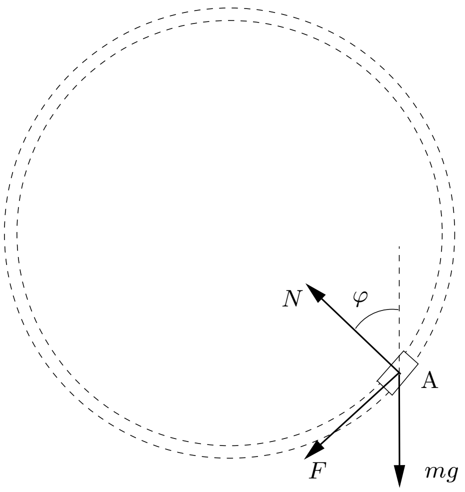
Balken BC:

$$\begin{array}{ll} \uparrow & N_{\mathrm{C}}\cos\alpha + V_{\mathrm{B}} - mg = 0, \\ \rightarrow & N_{\mathrm{C}}\sin\alpha - H_{\mathrm{B}} = 0, \\ \overset{\frown}{\mathrm{C}} & mg\dfrac{L}{2} - V_{\mathrm{B}}L = 0. \end{array}$$

Balken AB:

$$\begin{array}{ll} \uparrow & V_{\mathrm{A}} - V_{\mathrm{B}} - mg = 0, \\ \leftarrow & H_{\mathrm{A}} - H_{\mathrm{B}} = 0, \\ \overset{\frown}{\mathrm{A}} & M_{\mathrm{A}} - H_{\mathrm{B}}L = 0. \end{array}$$

4.



$$\nwarrow \qquad N - mg\cos\varphi = m\frac{v^2}{R},$$
$$\nearrow \quad -F - mg\sin\varphi = ma_s.$$

Eftersom A glider är dessutom

$$\frac{F}{N} = \mu.$$

5.

a) Eftersom inga yttre horisontella krafter verkar på systemet under stöten, bevaras rörelsemängden:

$$mv_0 = (2m + m)v \quad \Rightarrow \quad v = \frac{v_0}{3},$$

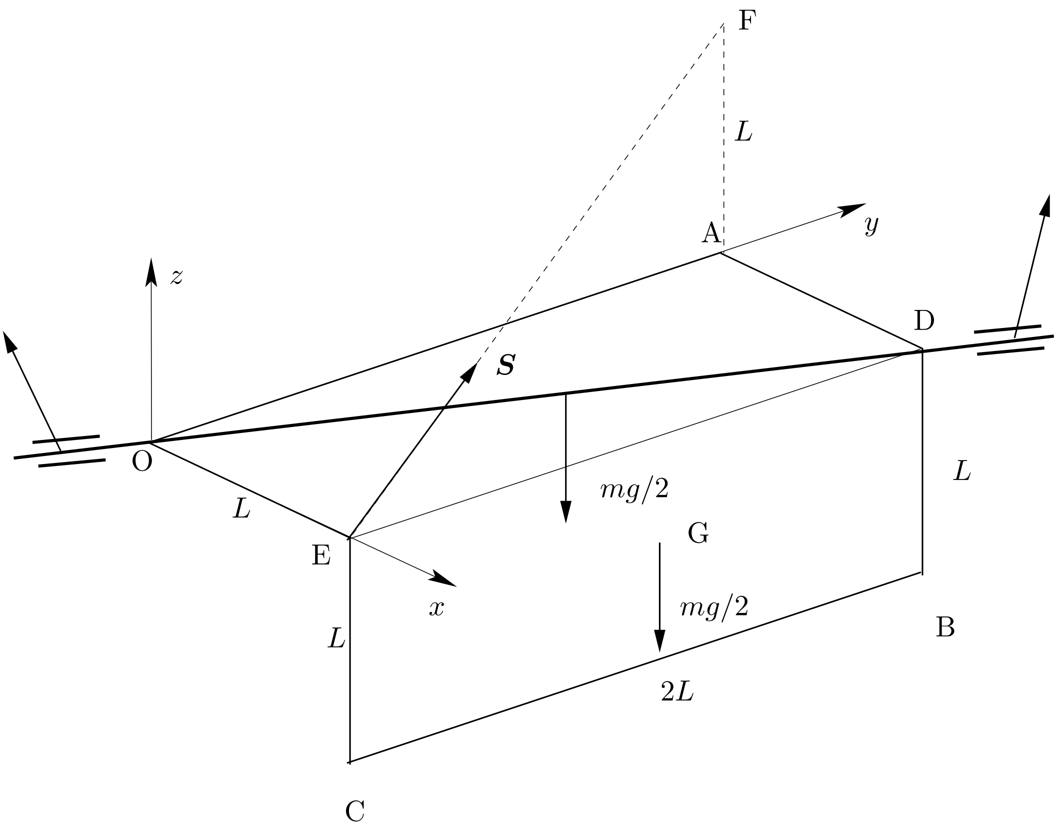
där v är den sökta hastigheten.
b) Efter det att kropparna fastnat i varandra är fjäderkraften den enda kraft som verkar på systemet. Eftersom denna är konservativ, bevaras energin, vilket ger

$$\frac{1}{2} \cdot 3mv^2 = \frac{1}{2}k\delta^2,$$

där δ är den maximala hoptryckningen. Vi får då

$$\delta = v\sqrt{\frac{3m}{k}} = v_0\sqrt{\frac{m}{3k}}.$$

6.



Beteckna massan för hela plåten med m.
Jämviktsvillkor: $\Sigma M_{\mathrm{OD}} = 0$.
Av de verkande krafterna är det endast linkraften och tyngdkraften på BCED som bidrar till ΣM_{OD}. Linkraften kan skrivas på vektorform som

$$\boldsymbol{S} = S\frac{\overrightarrow{\mathrm{EF}}}{|\overrightarrow{\mathrm{EF}}|},$$

där

$$\overrightarrow{\mathrm{EF}} = (-L,\, 2L,\, L) \Rightarrow |\overrightarrow{\mathrm{EF}}| = \sqrt{6}L,$$

vilket ger

$$\boldsymbol{S} = \frac{S}{\sqrt{6}}(-1,\, 2,\, 1).$$

$$\Sigma \boldsymbol{M}_{\mathrm{O}} = \overrightarrow{\mathrm{OE}} \times \boldsymbol{S} + \overrightarrow{\mathrm{OG}} \times (-\frac{mg}{2}\boldsymbol{e}_z) + \ldots,$$

där bidrag från de krafter som inte har moment med avseende på axeln OD utelämnats.

$$\Sigma \boldsymbol{M}_{\mathrm{O}} = \frac{S}{\sqrt{6}}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ L & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \frac{mg}{2}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ L & L & -L/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{SL}{\sqrt{6}}(0,\, -1,\, 2) + \frac{mgL}{2}(-1,\, 1,\, 0).$$

$$\Sigma M_{\mathrm{OD}} = \Sigma \boldsymbol{M}_{\mathrm{O}} \cdot \frac{\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|},$$

där

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = (L,\, 2L,\, 0) \Rightarrow |\overrightarrow{\mathrm{OD}}| = \sqrt{5}L,$$

vilket ger

$$\Sigma M_{\mathrm{OD}} = -\frac{2SL}{\sqrt{30}} + \frac{mgL}{2\sqrt{5}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S = \frac{\sqrt{6}}{4}mg.$$

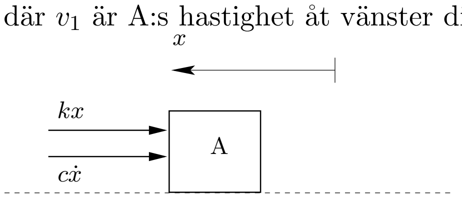
Anm. Om plåtens massa betecknas $2m$, blir förstås svaret $S = (\sqrt{6}/2)mg$.

7.

Eftersom inga yttre horisontella krafter verkar på systemet under stöten, bevaras rörelsemängden:

$$mv_0 = 5mv_1 - m\frac{v_0}{9} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{2v_0}{9},$$

där v_1 är A:s hastighet åt vänster direkt efter stöten ($t = 0$).



Fjäderns hoptryckning under den fortsatta rörelsen betecknas x, vilket ger friläggningen till vänster, där $c = \sqrt{20km}$ är dämpningskonstanten.

$$\leftarrow \quad -kx - \sqrt{20km}\dot{x} = 5m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + 2\sqrt{\frac{k}{5m}}\dot{x} + \frac{k}{5m}x = 0.$$

Substitutionen

$$2\zeta\omega = 2\sqrt{\frac{k}{5m}}, \qquad \omega^2 = \frac{k}{5m}$$

ger att $\zeta = 1$, d v s svängningen är kritiskt dämpad. Ur formelsamling fås

$$x = (C_1 t + C_2)\mathrm{e}^{-\omega t},$$

där konstanterna C_1 och C_2 bestäms med hjälp av begynnelsevillkoren $x = 0$ och $\dot{x} = 2v_0/9$ för $t = 0$. Med

$$\dot{x} = C_1 e^{-\omega t} - (C_1 t + C_2)\omega\mathrm{e}^{-\omega t}$$

finner man att

$$\begin{aligned} 0 &= C_2, \\ \frac{2v_0}{9} &= C_1 - C_2\omega. \end{aligned}$$

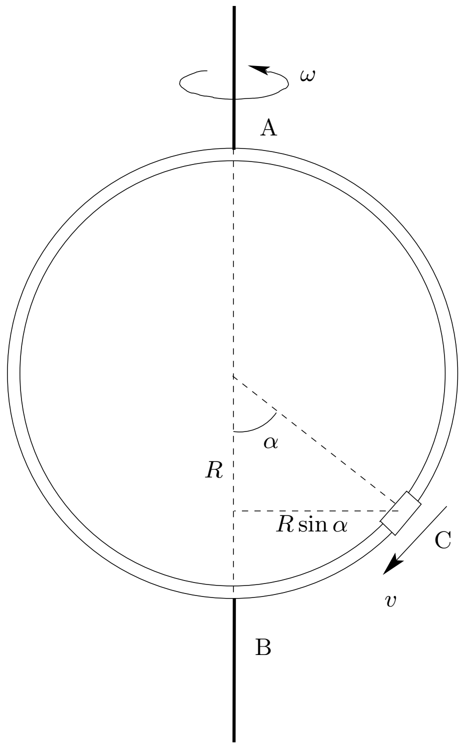
Insättning i uttrycken för x och $\dot{x}$ ger

$$\begin{aligned} x &= \frac{2v_0}{9} t\mathrm{e}^{-\omega t}, \\ \dot{x} &= \frac{2v_0}{9}(1-\omega t)\mathrm{e}^{-\omega t}. \end{aligned}$$

Maximal hoptryckning fås då $\dot{x} = 0$, vilket inträffar för $t = 1/\omega$. Motsvarande värde på x är

$$x_{\max} = \frac{2v_0}{9} \cdot \frac{1}{\omega}\mathrm{e}^{-1} = \frac{2v_0}{9\mathrm{e}}\sqrt{\frac{5m}{k}}.$$

8.



a) Betrakta systemet ring + C. Yttre krafternas moment med avseende på axeln AB är noll, vilket betyder att motsvarande rörelsemängdsmoment bevaras.

$$I\omega_0 + mR^2\omega_0 = I\omega + m(R\sin\alpha)^2\omega.$$

Här är I ringens tröghetsmoment med avseende på diametern AB. Ur formelsamling fås

$$I = \frac{1}{2} \cdot 7mR^2.$$

Insättning ger svaret

$$\omega = \frac{9}{7 + 2\sin^2\alpha}\omega_0.$$

b) Eftersom tyngdkraften på C är den enda kraft som uträttar arbete på systemet, bevaras energin. Man finner att

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2 + \frac{1}{2}m(R\omega_0)^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m\left((R\sin\alpha \cdot \omega)^2 + v^2\right) - mgR\cos\alpha,$$

där v är den sökta relativhastigheten. Efter insättning av svaret i a) samt $\alpha = 45°$ efter förenkling

$$v = \sqrt{\sqrt{2}gR - \frac{9}{16}R^2\omega_0^2}.$$