**Tentamen i TME010 Mekanik, 2011-08-25 kl 14.00–18.00 i "V"-salar**

*Jourhavande*: Peter Folkow, tel 1521 och 0702-78 48 77 (salarna besöks 15.00 och 16.30)

*Lösningar* anslås på Institutionen för tillämpad mekanik, Avd dynamik, och på kurshemsidan senast den 26/8.

*Preliminärt rättningsresultat* anslås på Tillämpad mekanik senast den 12/9 2011.

*Rättningsgranskning och utlämning av tentor* sker på Tillämpad mekanik 15/9 och 16/9 kl 12.00–13.00.

*Tillåtna hjälpmedel*: Formelsamling i mekanik av M.M. Japp,<br>Matematiska handböcker (t ex Beta),<br>Chalmersgodkänd räknare är tillåten.

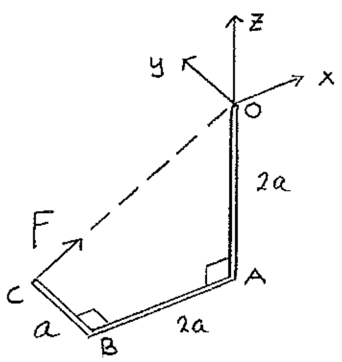
*Betygsgränser*: Uppgift 1-5 ger maximalt 3 poäng vardera. Uppgift 6-8 ger maximalt 5 poäng vardera. Betyget på tentamen ges enligt följande tabell:

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="4">Poäng på uppgift 1-5 (inkl bonuspoäng)</td></tr>
<tr><td>0-9</td><td>10</td><td>11</td><td>12-18</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Poäng på uppgift 6-8</td><td>0-4</td><td>U</td><td>U</td><td>U</td><td>3</td></tr>
<tr><td>5-9</td><td>U</td><td>U</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>10-15</td><td>U</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
</table>

UPPSTÄLLDA EKVATIONER SKALL MOTIVERAS.

---

**1.**



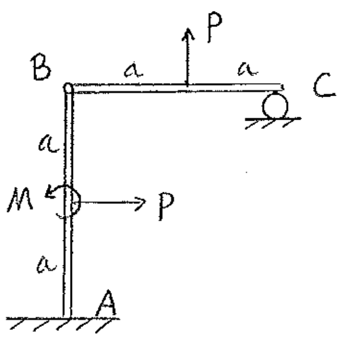

En stång OC med längden $5a$ är böjd i punkterna A och B enligt figuren. Delen OA är parallell med $z$-axeln, AB är parallell med $x$-axeln och BC är parallell med $y$-axeln. En kraft med beloppet $F$ verkar i punkten C, och är riktad mot O.

a) Uttryck kraften som en vektor. (1 poäng)

b) Bestäm kraftens moment med avseende på punkten A. (1 poäng)

c) Bestäm kraftens moment med avseende på punkten O. (1 poäng)

**2.**

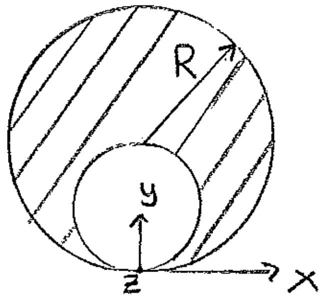



Två masslösa stänger AB och BC är förenade med en led i B. Systemet utsätts för krafter och moment enligt figuren.

a) Frilägg strukturen ABC som en helhet, samt delsystemen AB och BC. Införda beteckningarna skall vara inbördes konsekventa för de olika systemen. (1 poäng)

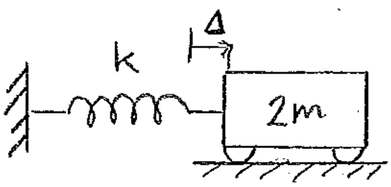
b) Ställ upp de jämviktsekvationer som behövs för att bestämma samtliga reaktionskrafter/moment i A och C. (Observera att ekvationerna *inte* behöver lösas.) (2 poäng)

**3.**



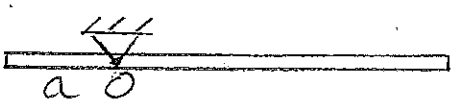

Ur en skiva med radie $R$ och ytdensitet (massa per ytenhet) $\sigma$ är ett hål utskuret med radie $R/2$. Bestäm
a) tyngdpunktens position $(\overline{x}, \overline{y})$, (1 poäng)
b) masströghetsmomentet med avseende på $z$-axeln. (2 poäng)

**4.**



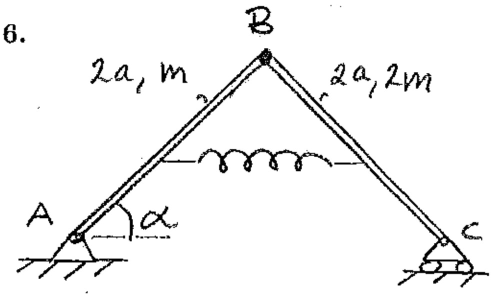

En kropp, massa $2m$, är förbunden med en fjäder, styvhet $k$, enligt figuren. Fjädern förlängs sträckan $\Delta$ och släpps därefter från vila. Bestäm
a) tiden för en svängning, (1 poäng)
b) läget som funktion av tiden, $x(t)$, där $x$ mäts från ospänd fjäderlängd, (1 poäng)
c) när den maximala farten uppnås första gången under svängningförloppet. (1 poäng)

**5.**




En smal stång, massa $m$ och längd $4a$, kan rotera fritt kring O enligt figuren. Stången släpps från vila, och påbörjar därefter en rotation på grund av gravitationen. Vilken vinkelhastighet har stången då den passerar sitt vertikala läge? (3 poäng)

6.

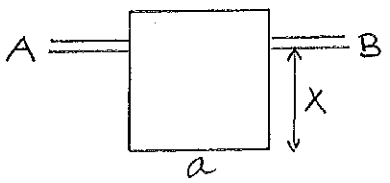



Två stänger, AB med massa $m$ och BC med massa $2m$, är förenade med en led i B. Båda stängerna har längden $2a$. Mitt på stängerna är en fjäder fäst, med ospänd längd $a$. Systemet befinner sig i jämvikt för en viss vinkel $\alpha$. Bestäm härur fjäderkonstanten.

7.

På en skjutbana har man placerat måltavlorna framför en sandvall som fångar upp kulorna. Sanden bromsar kulorna med en kraft som är proportionell mot kulans hastighet. En pistolkula har massan 14 gram och träffar sandvallen med hastigheten 300 m/s och tränger in en halvmeter i sanden. Hur långt tränger en gevärskula in, om den har massan 32 gram och hastigheten 450 m/s?

8.




En kvadratisk skiva med sidan $a$ kan svänga kring den horisontella axeln AB i skivans plan. För vilket avstånd $a/2 < x < a$ blir svängningstiden som minst? Antag små svängningar.

# Lösningar Mek Z, I, TD 25/8-11

① a/ $\mathbf{F} = F\,\mathbf{e}_{CO}$ (1) $\quad \mathbf{e}_{CO} = \dfrac{(2a,-a,2a)}{\sqrt{9a^2}} = \dfrac{(2,-1,2)}{3}$

så (1) ger $\mathbf{F} = F/3\,(2,-1,2)$ (2) //

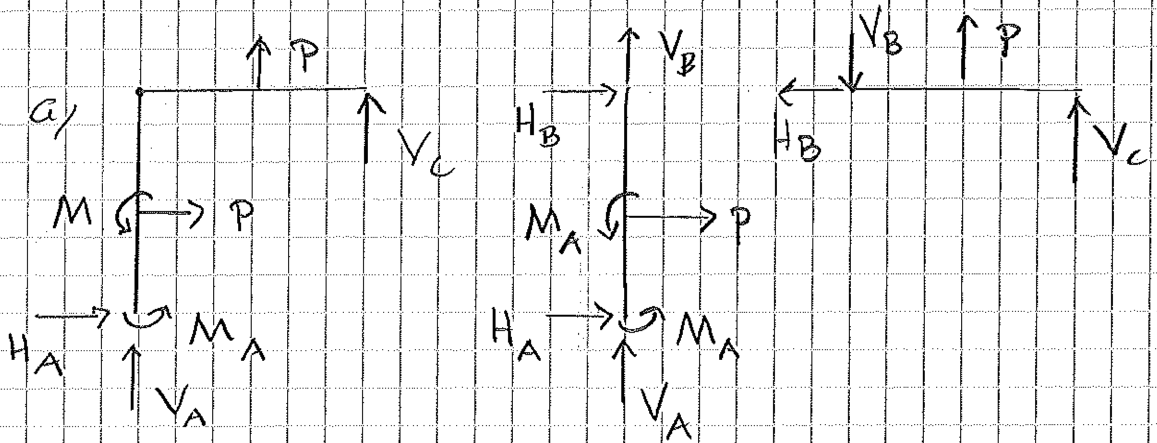
b/ $\mathbf{M}_A = \overrightarrow{AC} \times \mathbf{F}$ (3) där $\overrightarrow{AC} = (-2a, a, 0)$

(3) med (2) ger då

$$\mathbf{M}_A = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ -2a & a & 0 \\ 2F/3 & -F/3 & 2F/3 \end{vmatrix} = 2Fa/3\,(1,2,0) \quad //$$

c/ $\mathbf{M}_O = \overrightarrow{OC} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ då $\mathbf{F}$ riktad längs CO.

② a/




b/ ABC:

$\uparrow$: $V_A + V_C + P = 0$ (1)

$\rightarrow$: $H_A + P = 0$ (2)

$\overset{\curvearrowleft}{A}$: $V_C \cdot 2a + Pa + M - Pa + M_A = 0$ (3)

BC:

$\overset{\curvearrowleft}{B}$: $V_C \cdot 2a + Pa = 0$ (4)

$[\, H_A = -P;\ V_A = -P/2\ ;\ V_C = -P/2;\ M_A = Pa - M \,]$

(13) a/ $\bar{x} = 0$ pga symmetri.

$$\bar{y} = \frac{m_1 \bar{y}_1 - m_2 \bar{y}_2}{m_1 - m_2} = \frac{\sigma A_1 \bar{y}_1 - \sigma A_2 \bar{y}_2}{\sigma A_1 - \sigma A_2} =$$

$$= \frac{A_1 \bar{y}_1 - A_2 \bar{y}_2}{A_1 - A_2} \quad (1)$$

; Kropp 1 radie $R$
Kropp 2 radie $R/2$ utskuret.

$A_1 = R^2\pi$ ; $\bar{y}_1 = R$ ; $A_2 = R^2\pi/4$ ; $\bar{y}_2 = R/2$

Ins. (1) ger $\bar{y} = 7/6\, R$ //

b/ $I_z = I_{1,z} - I_{2,z}$ (2)

$I_{1,z} = \frac{1}{2} m_1 R^2 + m_1 R^2$ (FS s. 17 tal 1)

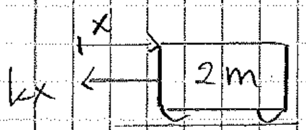
Steiner.

$I_{2,z} = \frac{1}{2} m_2 R^2/4 + m_2 R^2/4$

Ins. $m_1 = \sigma A_1$ o $m_2 = \sigma A_2$ i (2) ger

$I_z = 45/32\, \sigma R^4 \pi$ //

(4) Frilägg




$\rightarrow: \; -kx = 2m\ddot{x} \rightarrow$

$$\ddot{x} + \underbrace{k/2m}_{\omega^2} x = 0 \quad (1)$$

a/ $\tau = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{2m/k}$ //

b/ (1) lösn. $X(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)$

enl. FS s. 11. $X(0) = \Delta \to C_2 = \Delta$; $\dot{X}(0) = 0 \to C_1 = 0$

$X(t) = \Delta \cos(\omega t)$ //

c/ $\dot{X}(t) = -\Delta \omega \sin(\omega t)$ där $|\sin(\omega t)| = 1$

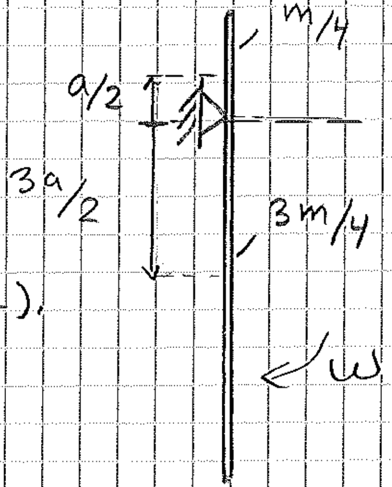
uppnås först då $t^* = \pi/2 \,/\omega$ // [1/4 period]

[ $\ddot{X}(t^*) = -\Delta \omega^2 \cos(\omega t^*) = 0$ då ]

(5) Ingen friktion → $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$ (1)

$T_1 = 0$ (vila) $V_1 = 0$ (noll-läge i O).

$T_2 = \frac{1}{2} I_0 \omega^2$




$V_2 = \left(\frac{m}{4} \frac{a}{2} - \frac{3m}{4} \cdot \frac{3a}{2}\right) g = -mga$

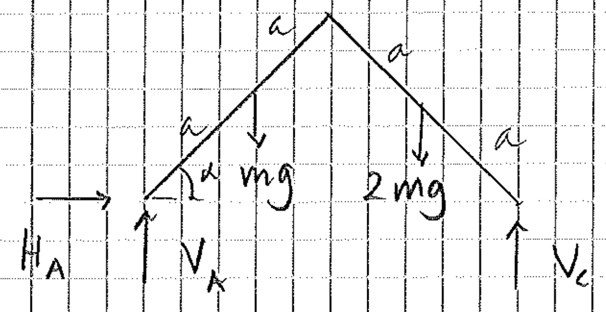
Ins. i (1) → $\omega^2 = 2mga/I_0$ (2).

$I_0 = \frac{1}{12} m (4a)^2 + ma^2 = \frac{7}{3} ma^2$ (3)

(3) i (2) ger

$\omega = \sqrt{6g/7a}$

(6) Frilägg hela systemet ABC:



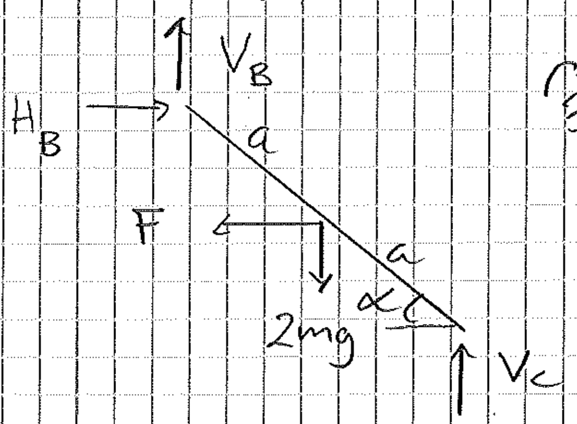

$\rightarrow$: $H_A = 0$ (1)

$\uparrow$: $V_A + V_C - mg - 2mg = 0$ (2)

$\curvearrowleft A$: $(V_C \cdot 4a - 2mg \cdot 3a - mga)\cos\alpha = 0 \Rightarrow$

$V_C = 7/4\, mg$ (3) ; (2) $\rightarrow$ $V_A = 5/4\, mg$ (4)

Frilägg en stång, t. ex. BC




$\curvearrowright B$: $F\, a \sin\alpha + 2mg\, a\cos\alpha - V_C\, 2a\cos\alpha = 0$ (5)

(3) ins. i (5) $\rightarrow$

$F = 3/2\, mg \cot\alpha$ (6)

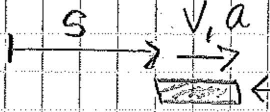
$F = k\Delta$ (7), där $\Delta = 2a\cos\alpha - a = a(2\cos\alpha - 1)$

som är fjäderförlängningen.

(6) och (7) ger

$$k = \frac{3/2\, mg \cot\alpha}{a(2\cos\alpha - 1)} =$$

(7) Kulans framfart i sanden:




$F = kv \qquad \rightarrow: \ -F = ma \quad (1)$

$a = dv/dt = \underline{v\, dv/ds}$ i (1) ger

$-kv = m v\, dv/ds \rightarrow \text{sep} \rightarrow -k/m\, ds = dv$

$$\rightarrow \int_0^{s^*} -k/m\, ds = \int_{v_0}^{0} dv \leftrightarrow k/m\, s^* = v_0 \quad (2)$$

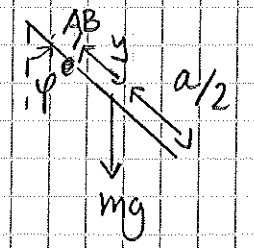
Pistol: $m = 0{,}014$ kg; $s^* = 0{,}5$ m; $v_0 = 300$ m/s

In i (2) $\rightarrow$ $k = 8{,}4$ kg/s. (3)

Gevär: $m = 0{,}032$ kg; $v_0 = 450$ m/s.

Ins. i (2) m.h.a. (3) $\rightarrow s^* = 1{,}71$ m //

(8) Vid svängning från sidan:




$x = y + a/2$

$\curvearrowleft AB: \ -mgy \sin\varphi = I_{AB}\ddot{\varphi} \rightarrow$

$$\rightarrow [\sin\varphi \approx \varphi] \rightarrow \ddot{\varphi} + \underbrace{mgy/I_{AB}}_{\omega^2}\varphi = 0 \quad (1)$$

$I_{AB} = \frac{1}{12}ma^2 + \underbrace{my^2}_{\text{Steiner}}$ enl. FS s.16 fall 1.

Svängn.tid $\tau = 2\pi/\omega$. $\tau_{min} \rightarrow \omega^2_{max}$.

$\omega^2 = 12gy/(a^2 + 12y^2)$. $\omega^2_{max}$ då $d(\omega^2)/dy = 0$

$$\leftrightarrow \frac{12g(a^2 + 12y^2) - 12gy \cdot 24y}{[a^2 + 12y^2]^2} = 0 \rightarrow y = \frac{a}{\sqrt{12}} \ // \ [x = y + a/2]$$