Tentamen i TME010 Mekanik, 2010-04-09 kl 14.00–18.00 i "Maskin"-salar

Jourhavande: Peter Folkow, tel 1521 och 0702-78 48 77 (salarna besöks 15.00 och 16.30)

Lösningar anslås på Institutionen för tillämpad mekanik, Avd dynamik, och på kurshemsidan senast den 12/4.

Preliminärt rättningsresultat anslås på Tillämpad mekanik senast den 26/4 2010.

Rättningsgranskning och utlämning av tentor sker på Tillämpad mekanik 27/4 och 29/4 kl 12.00–13.00.

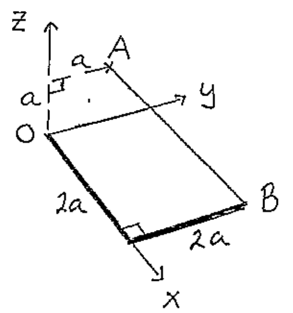
Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i mekanik av M.M. Japp,
Matematiska handböcker (t ex Beta),
Chalmersgodkänd räknare är tillåten.

Betygsgränser: Uppgift 1-5 ger maximalt 3 poäng vardera. Uppgift 6-8 ger maximalt 5 poäng vardera. Betyget på tentamen ges enligt följande tabell:

		Poäng på uppgift 1-5 (inkl bonuspoäng)			
		0-9	10	11	12-18
Poäng på uppgift 6-8	0-4	U	U	U	3
	5-9	U	U	3	4
	10-15	U	3	4	5

UPPSTÄLLDA EKVATIONER SKALL MOTIVERAS.

1.

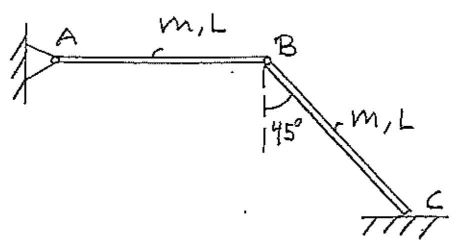


En böjd stång, längd $4a$, är formad som ett "L". Stången befinner sig i xy-planet, där en lina fäster i B. Linan fäster i sin tur även i väggen vid A (i yz-planet).

a) Uttryck linkraften med beloppet S som verkar på stången vid B som en vektor. (1 poäng)

b) Bestäm denna linkrafts moment med avseende på O. (2 poäng)

2.



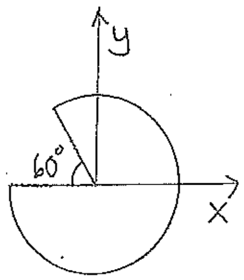
En struktur i jämvikt är sammansatt av två stänger, AB och BC, med massa m och längd L vardera. Stängerna är friktionsfritt ledade i A och B. Ena stången stöder mot det sträva underlaget i C.

a) Frilägg stängerna AB och BC var för sig. (1 poäng)

b) Ställ upp de jämviktsekvationer som krävs för att kunna erhålla ett uttryck för friktionskoefficienten vid C. (2 poäng)

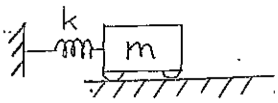
(Observera att ekvationerna *inte* behöver lösas)

3.



Ur en homogen cirkulär skiva, radie r, är en cirkelsektor utskuren enligt figur. Bestäm x-koordinaten för kroppens tyngdpunkt.
(3 poäng)

4.



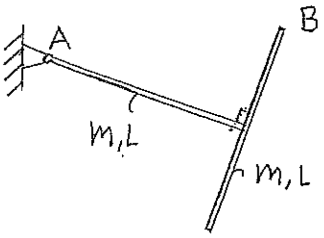
En kropp, massa m, kan rulla friktionsfritt på ett horisontellt underlag. Kroppen är förbunden med en fjäder, fjäderstyvhet k, och släpps från vila då fjädern är hopptryckt sträckan Δ från ospänt läge. Kroppen påbörjar därefter en rörelse åt höger. Bestäm:

a) kroppens maximala fart under den efterföljande rörelsen, (1 poäng)

b) kroppens acceleration (storlek och riktning) i vändläget med utdragen fjäder,
(1 poäng)

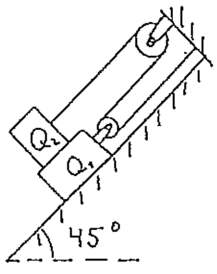
c) tiden tills kroppen åter befinner sig i ursprungsläget. (1 poäng)

5.



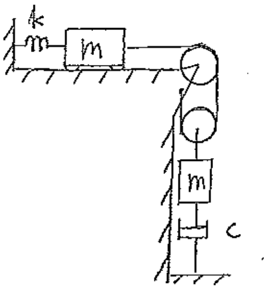
En kropp är sammansatt av två smala stänger, massa m och längd L vardera. Kroppen kan vridas kring leden i A. Vid en tidpunkt uppmäts farten v hos punkten B. Ställ upp de ekvationer ur vilka kroppens rörelseenergi kan bestämmas vid denna tidpunkt. (3 poäng)
(Observera att ekvationerna *inte* behöver lösas)

6.



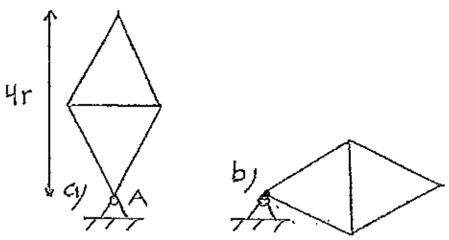
Två sträva kroppar med tyngden Q_1 och Q_2 är förenade med linor enligt figur. Bestäm största och minsta värdet på kvoten Q_1/Q_2 som kan förekomma vid jämvikt. Friktionskoefficienten är 0.3 mellan kropparna samt mellan undre kroppen och underlaget. (5 poäng)

7.



Systemet i figuren kan utföra dämpad svängningsrörelse, $c = \sqrt{20mk}$.
Bestäm perioden i denna. (5 poäng)

8.



En dubbelkon består av två identiska raka, cirkulära och homogena koner (basradie r, höjd $2r$, massa m vardera) vilka sammanfogats vid basytorna. Kroppen släpps från vila enligt figur a), och påbörjar därefter en rotation kring A (friktionsfritt lagrad). Bestäm horisontella och vertikala komposanterna av reaktionskraften på kroppen i A då den roterat ett kvarts varv enligt figur b). (5 poäng)

Lösningar 10-04-09

① a/ $\mathbf{S} = S\,\mathbf{e}_{BA}$ (1) $\mathbf{e}_{BA} = \dfrac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|}$ (2)

$\overrightarrow{BA}$ = A koord − B koord = $(-2a, -a, a) \rightarrow$

$|\overrightarrow{BA}| = (4a^2 + a^2 + a^2)^{1/2} = \sqrt{6}\,a$ (3)

(2) o (3) i (1) $\rightarrow \mathbf{S} = \dfrac{S}{\sqrt{6}}(-2, -1, 1)$ (4)

b/ $\mathbf{M}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{S}$ (5)

$\mathbf{r} = \overrightarrow{OB} = (2a, 2a, 0)$ (6)

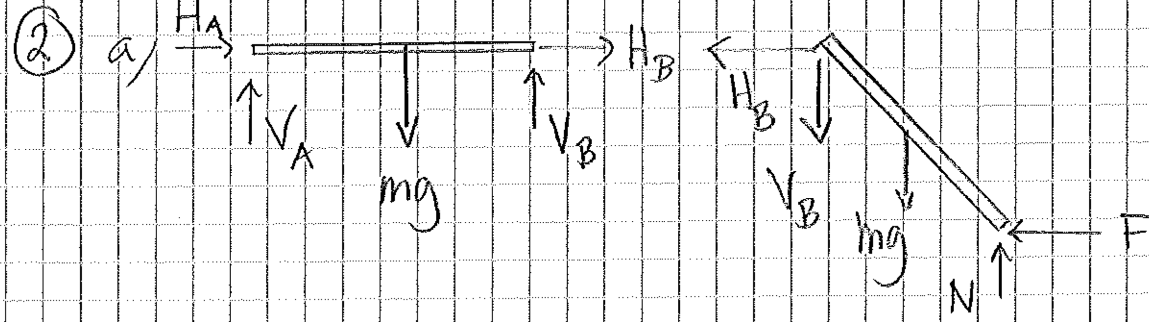
(4) och (6) i (5) $\rightarrow$

$$\mathbf{M}_0 = \frac{S}{\sqrt{6}}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 2a & 2a & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{S}{\sqrt{6}}(2a, -2a, 2a)$$

Alt. $\mathbf{r} = \overrightarrow{OA} = (0, a, a)$ fungerar också.

---

② a/

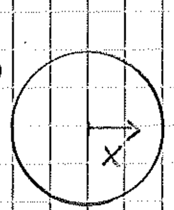
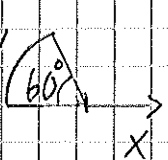


b/ $\mu \geq |F|/|N| = F/N$ (rätt riktade).

Hela Strukt.: $\overset{\curvearrowleft}{A}$: $mg\,L/2 + mg\,(L/(2\sqrt{2}) + L) - N\,(L/\sqrt{2} + L) + F\,L/\sqrt{2} = 0$

Dc kropp BC: $\overset{\curvearrowleft}{B}$: $mg\,L/(2\sqrt{2}) - N\,L/\sqrt{2} + F\,L/\sqrt{2} = 0$

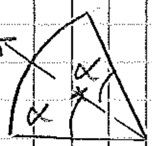
[$N = 3/2\,mg$; $F = mg$; $H_A = mg$; $V_A = mg/2$; $H_B = -mg$; $V_B = mg/2$]

(3) 1)  − 2) 

$$\bar{x} = \frac{A_1 \bar{x}_1 - A_2 \bar{x}_2}{A_1 - A_2} \quad (1)$$

1/ $A_1 = r^2\pi \qquad \bar{x}_1 = 0$

2/ $A_2 = 60/360 \cdot r^2\pi = r^2\pi/6$



FS sid 15 fall 3 ger

$$\bar{r} = \frac{2r \sin\alpha}{3\alpha} \quad \text{där } \alpha = \pi/6 \ [30^\circ]$$

$$\bar{x}_2 = -\bar{r}\cos\alpha = -\frac{2r \sin\alpha\cos\alpha}{3\alpha} = -\sqrt{3}\, r/\pi$$

Ins. i (1) → $\dfrac{0 + r^2\pi/6 \cdot \sqrt{3}\, r/\pi}{5/6\, r^2\pi} = \dfrac{r\sqrt{3}}{5\pi} \approx 0{,}11r$ //

---

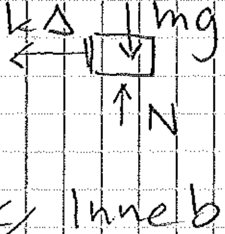
(4) $T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (1)$

a/ $T_1 = 0$; $V_1 = \frac{1}{2}k\Delta^2$. Max fart då $V_2 = 0$,

d.v.s. fjäder ospänd. $T_2 = \frac{1}{2}mv^2$

(1) → $v_{max} = \sqrt{k/m}\,\Delta$ //

b/ Vändläget fjäderförl. Δ (ty $T_2 = 0$)

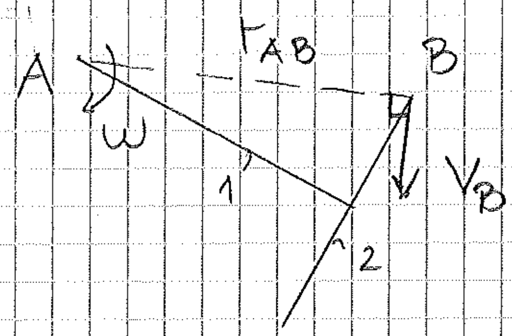


$\leftarrow k\Delta = ma \rightarrow a = k\Delta/m$ (åt vänster) //

c/ Innebär en hel svängning, där $\omega = \sqrt{k/m}$

Tiden $\tau = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/k}$ //

5



$$T = \tfrac{1}{2} I_A \omega^2 \quad (1)$$

$V_B = r_{AB}\,\omega$, så

$$\omega = V_B / r_{AB} \quad (2)$$

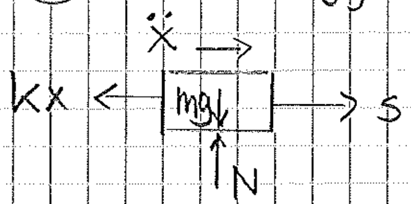
$$r_{AB} = (L^2 + L^2/4)^{1/2} = \sqrt{5}\,L/2 \quad (3)$$

$$I_A = I_{A,1} + I_{A,2} = \underbrace{\tfrac{1}{3} mL^2}_{I_{A,1}} + \underbrace{\tfrac{1}{12} mL^2 + mL^2}_{I_{A,2}} \quad (4)$$

(2) − (4) i (1) //

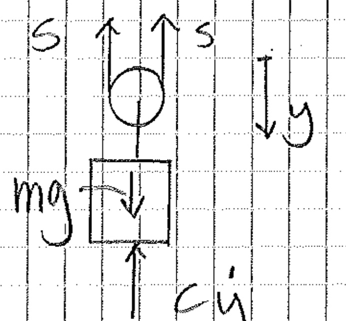
---

7 Frilägg övre kroppen:



$$\rightarrow:\ s - kx = m\ddot{x} \quad (1)$$

Frilägg nedre kroppen:



$$\downarrow:\ mg - c\dot{y} - 2s = m\ddot{y} \quad (2)$$

Kinem. samb.: $x = 2y$ (3)

(3) i (1) →

$s = k2y + m2\ddot{y}$, ins. i (2) →

$$mg - c\dot{y} - 4ky - 4m\ddot{y} = m\ddot{y} \rightarrow$$

$$\ddot{y} + \underbrace{\tfrac{1}{5}\, c/m}_{2\zeta\omega}\,\dot{y} + \underbrace{\tfrac{4}{5}\, k/m}_{\omega^2}\, y = \tfrac{1}{5} g \quad (4)$$

Med $\omega = 2\sqrt{k/(5m)}$ och $c = \sqrt{20mk}$

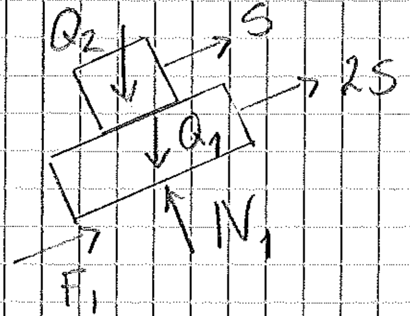
fås ur (4) $\zeta = 1/2$.

$\omega_d = \omega(1-\zeta^2)^{1/2} = \sqrt{\frac{3}{5}}\sqrt{\frac{k}{m}}$,

$\tau_d = 2\pi/\omega_d$ //

---

(6) Frilägg systemet, antag risk Q_1 glider nedåt

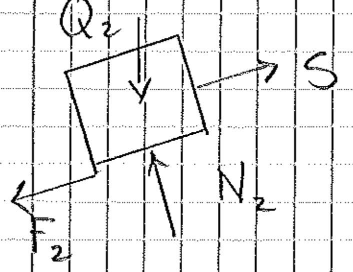


$\nearrow: \; 3S + F_1 - (Q_1+Q_2)/\sqrt{2} = 0$ (1)

$\nwarrow: \; N_1 - (Q_1+Q_2)/\sqrt{2} = 0$ (2)

(1) $\rightarrow S = [(Q_1+Q_2)/\sqrt{2} - F_1]$ (3)

Frilägg en delkropp, t.ex. Q_2 för detta glidfall



$\nearrow: \; S - F_2 - Q_2/\sqrt{2} = 0$ (4)

$\nwarrow: \; N_2 - Q_2/\sqrt{2} = 0$ (5)

(4) $\rightarrow S = [Q_2/\sqrt{2} + F_2]$ (6)

Precis före glidning $\rightarrow F_1 = \mu N_1$ & $F_2 = \mu N_2$

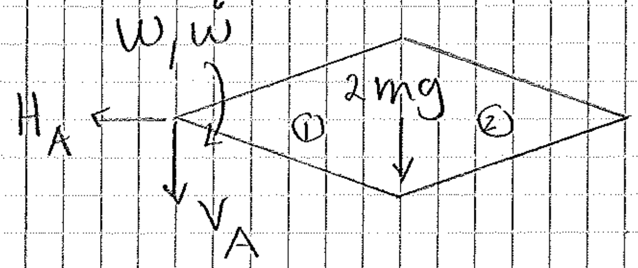
Ins. i (2), (3), (5) & (6) ger

$Q_1/Q_2 = 2[1+2\mu]/[1-\mu] \approx 4.57$ $[Q_1/Q_2\text{-max}]$ //

Vid risk Q_1 glider uppåt $\rightarrow F_1$ & F_2 teckenbyte $\rightarrow \mu$ byts mot $-\mu$ i kvoten ovan.

$Q_1/Q_2 = 2[1-2\mu]/[1+\mu] \approx 0,62$ $[Q_1/Q_2\text{-min}]$ //

(8) Vid vridning 90° har vi



$$\leftarrow \; H_A = 2m\bar{a}_n = 2m\cdot 2r\omega^2 \quad (1)$$

$$\downarrow: \; V_A + 2mg = 2m\bar{a}_s = 2m\cdot 2r\dot{\omega} \quad (2)$$

$\dot{\omega}$ ur rotationslagen:

$$\overset{\frown}{A}: \; 2mg\cdot 2r = I_A\dot{\omega} \rightarrow \dot{\omega} = 4mgr/I_A \quad (3)$$

ω^2 ur energilagen: $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$ (4)

$T_1 = 0$; $V_1 = 2mg\cdot 2r = 4mgr$ (mäts fr. A)

$T_2 = \frac{1}{2} I_A \omega^2 \qquad V_2 = 0$

$$(4) \rightarrow 4mgr = \frac{1}{2} I_A\omega^2 \rightarrow \omega^2 = 8mgr/I_A \quad (5)$$

[FS s.19, tall 1] →

$$I_A = [\bar{I} + md^2] = \underbrace{\frac{3}{20}mr^2 + \frac{3}{80}m(2r)^2}_{\bar{I}_{x,①}} + m\underbrace{\left(\frac{3r}{2}\right)^2}_{d_①^2}$$

$$+ \underbrace{\frac{3}{20}mr^2 + \frac{3}{80}m(2r)^2}_{\bar{I}_{x,②}} + m\underbrace{\left(\frac{5r}{2}\right)^2}_{d_②^2} = \frac{91}{10}mr^2 \quad (6)$$

$$(6) \text{ i } (5) \text{ i } (1) \rightarrow H_A = \frac{320}{91}mg \;//$$

$$(6) \text{ i } (3) \text{ i } (2) \rightarrow V_A = -22mg/91 \;//$$