Tentamen i TME010 Mekanik, 2009-12-15 kl 8.30–12.30 i "Maskin"-salar
Jourhavande: Peter Folkow, tel 1521 och 0702-78 48 77 (salarna besöks 9.15 och 11.00)
Lösningar anslås på Institutionen för tillämpad mekanik, Avd dynamik, och på kurshemsidan senast den 16/12.
Preliminärt rättningsresultat anslås på Tillämpad mekanik senast den 15/1 2010.
Rättningsgranskning och utlämning av tentor sker på Tillämpad mekanik 20/1 och 21/1 kl 12.00–13.00.

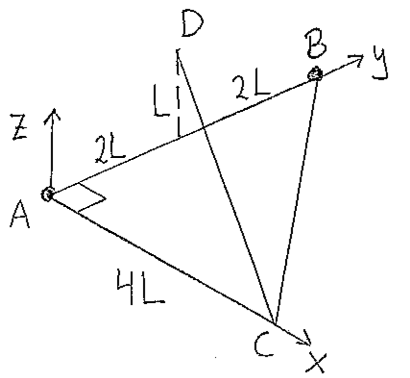
Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i mekanik av M.M. Japp,
Matematiska handböcker (t.ex Beta),
Chalmersgodkänd räknare är tillåten.

Betygsgränser: Uppgift 1-5 ger maximalt 3 poäng vardera. Uppgift 6-8 ger maximalt 5 poäng vardera. Betyget på tentamen ges enligt följande tabell:

		Poäng på uppgift 1-5 (inkl bonuspoäng)			
		0-9	10	11	12-18
Poäng på uppgift 6-8	0-4	U	U	U	3
	5-9	U	U	3	4
	10-15	U	3	4	5

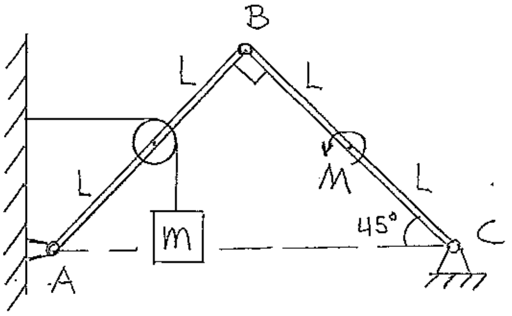
UPPSTÄLLDA EKVATIONER SKALL MOTIVERAS.

1.



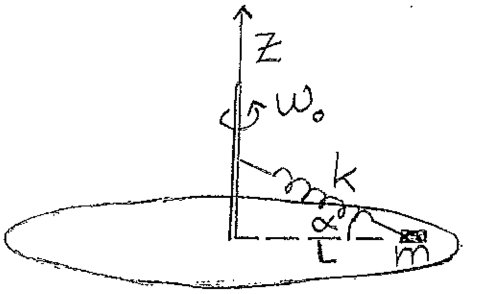
En triangulär skiva är lagrad i kulleder i A och B. Skivan hålls horisontell och i jämvikt genom linan CD.
a) Uttryck (den än så länge okända) linkraften med beloppet S som en vektor. (1 poäng)
b) Bestäm linkraftens moment med avseende på A. (1 poäng)
c) Skivans massa är m. Bestäm linkraften S uttryckt i mg. (1 poäng)

2.



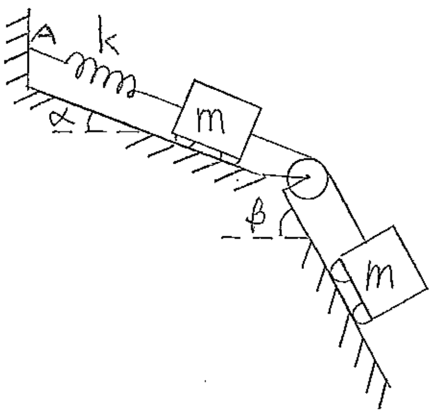
En struktur är sammansatt av två masslösa stänger, AB och BC. Mitt på stång AB är en masslös trissa fäst. En lina löper över trissan, där ena linänden uppbär en massa m enligt figur. Mitt på stång BC verkar ett rent moment M. Stängerna är friktionsfritt ledade i A, B, C.
Frilägg stång AB+trissa, respektive stång BC var för sig, samt ställ upp jämviktsekvationerna.
(För korrekt svar krävs att det i princip skall vara möjligt att bestämma samtliga obekanta krafter/moment med hjälp av jämviktsekvationerna. Observera att ekvationerna *inte* behöver lösas)

3.



En skiva roterar med en konstant vinkelhastighet ω_0 kring den vertikala z-axeln. På avståndet L är en partikel med massan m placerad. En fjäder, ospänd längd L och fjäderstyvhet k, är fäst i massan och i en vertikal axel på skivan. Vinkeln mellan fjäder och skivan är då α. Det råder friktion mellan partikeln och skivan, varvid partikeln inte glider. Frilägg partikeln och ställ upp ekvationer ur vilka normal- och friktionskraften mellan partikeln och skivan kan bestämmas. (Observera att ekvationerna *inte* behöver lösas).

4.

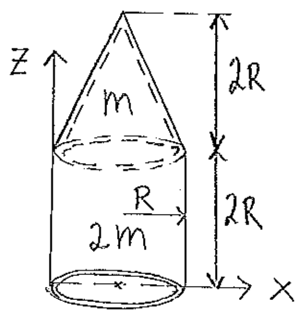


Två kroppar, massorna m vardera, kan rulla friktionsfritt på var sitt lutande plan, vinklar α och β. Kropparna är förbundna med varandra via en otänjbar lina som löper över en lätt, friktionsfri trissa. Den övre kroppen är i sin tur förbunden med en fjäder, fjäderstyvhet k. Hela systemet släpps från vila då fjädern är utdragen sträckan Δ från ospänt läge. Systemet rör sig därefter "uppåt" varefter fjädern blir ospänd och därefter trycks ihop innan systemet vänder i sitt översta läge. Bestäm för det ögonblick då fjädern är ospänd:

a) Farten för den övre kroppen. (2 poäng)

b) Kraften från systemet på väggen i A. (1 poäng)

5.



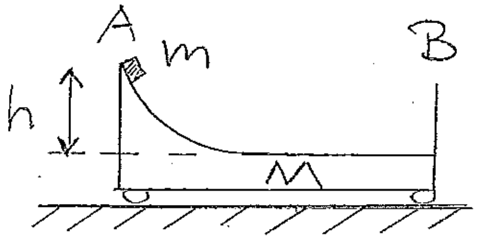
En kropp är sammansatt av ett tunt cylindriskt skal (massa $2m$, radie R, höjd $2R$) och ett tunt cirkulärt koniskt skal (massa m, radie R, höjd $2R$). Bestäm

a) tyngdpunktens läge $\bar{z}$, (1 poäng)

b) masströghetsmomentet med avseende på z-axeln, (1 poäng)

c) masströghetsmomentet med avseende på x-axeln. (1 poäng)

6.

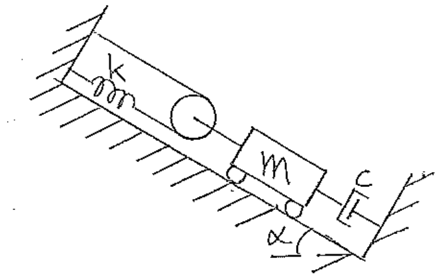


En partikel, massa m, är placerad på en vagn, massa M. Partikeln släpps från vila vid A (höjden h) och glider mot vagnens främre ände B. All friktion kan försummas. Bestäm

a) vagnens hastighet (storlek och riktning) precis innan partikeln når B, (3 poäng)

b) den mekaniska energi som går förlorad då partikel slår i kanten B och fastnar där. (2 poäng)

7.

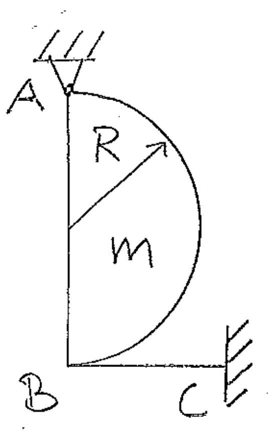


En massa m är förbunden med en dämpare, dämpningskonstant c, och en fjäder, fjäderkonstant k, enligt figuren. Systemet är kritiskt dämpat och släpps från vila vid $t = 0$ då fjädern är ospänd. Bestäm

a) dämpningskonstanten c, (2 poäng)

b) massans rörelse som funktion av tiden. (3 poäng)

8.



En tunn halvcirkelyta (massa m, radie R) är upphängd i en friktionsfri led i A. Kroppen hålls från början i jämvikt via en horisontell lina i B enligt figuren, varefter linan klipps. Bestäm beloppet av den reaktionskraft som verkar på skivan i A

a) när systemet är i jämvikt innan linan klipps, (1 poäng)

b) omedelbart efter att linan klipps av. (4 poäng)

Lösning Mekanik Z, I, TD
09 12 15

① a/ $\mathbf{S} = S\mathbf{e}_{CD}$; $\mathbf{e}_{CD} = \dfrac{(-4L, 2L, L)}{\sqrt{21}\ L} \rightarrow$

$$\mathbf{S} = \frac{S}{\sqrt{21}}(-4, 2, 1) \;//$$

b/ $\mathbf{M}_{A,S} = \overrightarrow{AC} \times \mathbf{S} =$

$$= \frac{S}{\sqrt{21}} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 4L & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{SL}{\sqrt{21}}(0, -4, 8) \;//$$

c/ $\Sigma M_{AB} = M_{AB,mg} + M_{AB,S} =$

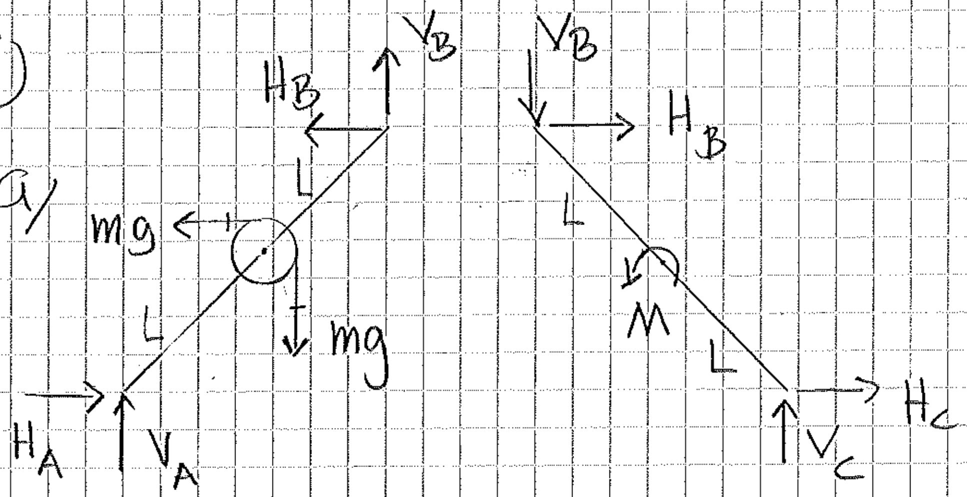
$$= mg \cdot 4L \cdot 1/3 - S_z\, 4L = 0 \leftrightarrow$$

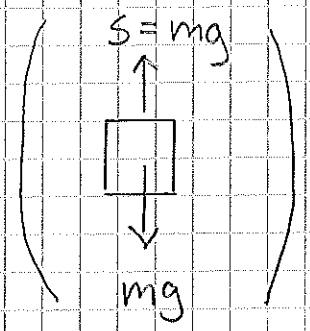
$$mg\, 4L/3 - S \cdot 4L/\sqrt{21} = 0 \rightarrow S = mg\sqrt{21}/3 \;//$$

[$M_{AB,S}$ fås även som $M_{A,S,y}$]

(2)

a/





AB :

$\rightarrow$: $H_A - mg - H_B = 0$ (1)

$\uparrow$: $V_A - mg + V_B = 0$ (2)

$\curvearrowleft A$: $mg(L/\sqrt{2} + r) - mg(L/\sqrt{2} + r) +$

$H_B\, 2L/\sqrt{2} + V_B\, 2L/\sqrt{2} = 0$ (3)

BC :

$\rightarrow$: $H_B + H_C = 0$ (4)

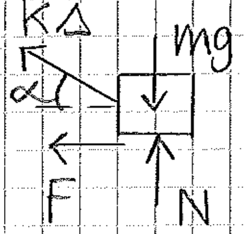
$\uparrow$: $-V_B + V_C = 0$ (5)

$\curvearrowleft C$: $M + V_B\, 2L/\sqrt{2} - H_B\, 2L/\sqrt{2} = 0$ (6)

6 ekv. o 6 obekanta

$[H_A, V_A, H_B, V_B, H_C, V_C]$

3)



$$\uparrow:\ N - mg + k\Delta \sin\alpha = 0 \quad (1)$$

$$\leftarrow:\ F + k\Delta\cos\alpha = m a_n = m L \omega_0^2 \quad (2)$$

$$\Delta = L/\cos\alpha - L \quad (3)$$

Ekv (1) − (3) → N och F. //

---

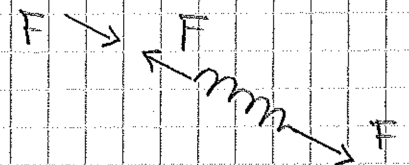
4) a) $T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (1)$

$T_1 = 0$; $V_1 = \frac{1}{2} k\Delta^2$;

$T_2 = \frac{1}{2}(m+m)v^2$; $V_2 = mg\Delta\sin\alpha + mg\Delta\sin\beta$;

Insatt i (1) ger v.

b) Fjäder ospänd, $F = 0$.



---

5) a) $$\bar{z} = \frac{2m\cdot R + m(2R + 2R/3)}{3m} = 14R/9 \quad //$$

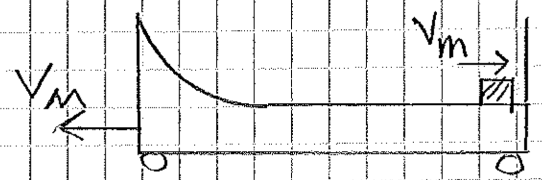
b) $$I_z = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 + 2mR^2 + 2mR^2 = 11mR^2/2 \quad //$$

c) $$I_x = \underbrace{\frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{18}m(2R)^2 + m\left(\frac{2R}{3} + 2R\right)^2}_{\text{kon}} + \underbrace{\frac{1}{2}(2m)R^2 + \frac{1}{3}(2m)(2R)^2}_{\text{cyl.}} = 45mR^2/4 \quad //$$

(6) a/ Inga förluster: $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$ (1)

$T_1 = 0$ (vila) $V_1 = mgh$

Precis före m framme vid B:



$T_2 = \frac{1}{2} m v_m^2 + \frac{1}{2} M V_M^2$

$V_2 = 0$

(1) $\rightarrow$ $mgh = \frac{1}{2}\left[m v_m^2 + M V_M^2\right]$ (2)

Inga yttre krafter på syst. m+M i sidled:

P_x bevaras; $P_{x,1} = P_{x,2}$

$$\left.\begin{aligned} P_{x,1} &= 0 \quad (\text{vila}) \\ P_{x,2} &= m v_m - M V_M \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_m = M V_M / m \quad (3)$$

(3) i (2) $\rightarrow$ $V_M = \sqrt{2mgh / M[1 + M/m]}$ (vänster) //

b/ P_x bevaras under <u>hela rörelsen</u>:

Antag gemensam fart V_{mM} åt höger

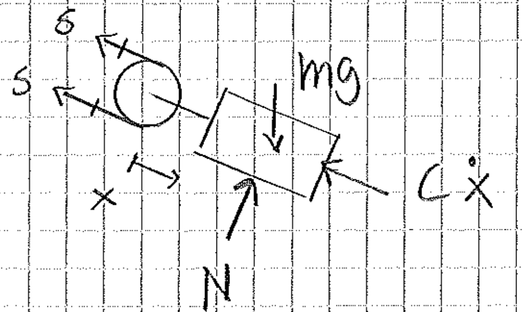
$P_{x,1} = 0$ (vila, se a/) ; $P_{x,3} = (m+M) V_{mM}$

$P_{x,1} = P_{x,3} \rightarrow V_{mM} = 0$ (vila igen!)

$W^{(ik)} = \Delta T + \Delta V = \underbrace{T_3}_{0} - \underbrace{T_1}_{0} + \underbrace{V_3}_{0} - V_1 = -mgh \rightarrow$

$\rightarrow mgh$ förloras //

(7) Frilägg massan ($x=0$ vid ospänd fjäder)



$\searrow$: $mg\sin\alpha - 2S - c\dot{x} = m\ddot{x}$ (1)

Fjäder utdragen $2x$, så

$S = 2kx$, Ins. i (1) $\rightarrow$

$mg\sin\alpha - 4kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$, d.v.s

$$\ddot{x} + \underbrace{c/m}_{2\zeta\omega}\dot{x} + \underbrace{4k/m}_{\omega^2}x = g\sin\alpha \quad (2)$$

a) $\omega^2 = 4k/m \rightarrow \omega = 2\sqrt{k/m}$

$2\zeta\omega = c/m \rightarrow c = 2\zeta\omega m = 4\zeta\sqrt{mk}$

$= [\zeta = 1] = 4\sqrt{mk}$ //

b) $x = x_h + x_p = e^{-\omega t}[C_3 t + C_4] + g\sin\alpha/\omega^2$ (3)

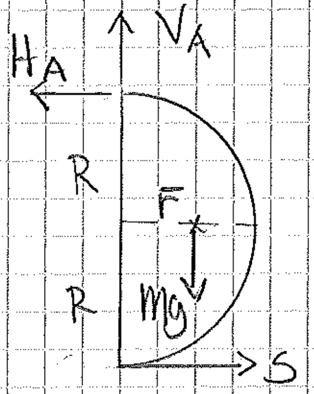
$x(0) = 0 \rightarrow C_4 = -g\sin\alpha/\omega^2$ (4) ur (3),

$\dot{x}(0) = 0 \rightarrow$ [derivera (3)] $\rightarrow -\omega \cdot C_4 + C_3 = 0$

$\rightarrow C_3 = \omega C_4 =$ ins. (4) $= -g\sin\alpha/\omega$,

$$x(t) = \frac{g\sin\alpha}{\omega^2}\left\{1 - e^{-\omega t}[\omega t + 1]\right\} \quad //$$

8) a) Jämvikt



$\leftarrow: \; H_A - S = 0 \quad (1)$

$\uparrow: \; V_A - mg = 0 \quad (2)$

$\curvearrowleft A: \; -S\,2R + mg\bar{r} = 0 \quad (3)$

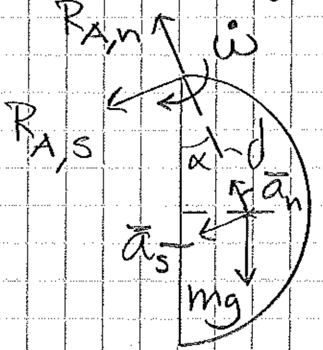
$[\bar{r} = 4R/3\pi]$

$(3) \rightarrow S = mg\bar{r}/(2R) = mg\,2/(3\pi)$

$(1) \rightarrow H_A = S = 2mg/(3\pi)$; $(2) \rightarrow V_A = mg$

$\rightarrow R_A = \sqrt{H_A^2 + V_A^2} \approx 1{,}02\; mg$

b) Dynamik $[\omega = 0;\; \dot{\omega} \neq 0]$



$\nwarrow: \; R_{A,n} - mg\cos\alpha = md\omega^2 = 0 \quad (4)$

$\swarrow: \; R_{A,S} + mg\sin\alpha = md\dot{\omega} \quad (5)$

$\curvearrowleft A: \; mg\bar{r} = I_A\dot{\omega} \quad (6)$

$[\bar{r} = d\sin\alpha]$ $\quad d^2 = R^2 + (4R/3\pi)^2$

$\tan\alpha = 4/3\pi$

$I_A = \bar{I} + md^2 = [\text{FS s. 17 fall 2}] = \frac{3}{2}mR^2$

$(6) \rightarrow \dot{\omega} = 2g\bar{r}/(3R^2) = 8g/(9\pi R)$

Ins. i (4) och (5) $\rightarrow$

$R_{A,n} \approx 0{,}92\; mg$; $R_{A,S} \approx -0{,}08\; mg \rightarrow R_A = \sqrt{R_{A,n}^2 + R_{A,S}^2} \approx 0{,}92\, mg$