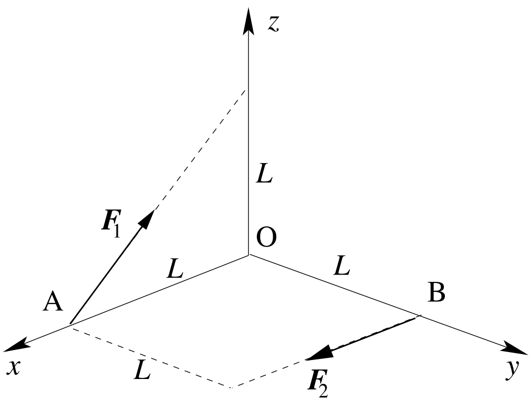
TME010 Mekanik 081217, lösningsförslag

1.



Krafterna kan uttryckas på vektorform som

$$\boldsymbol{F}_1 = (-F/\sqrt{2},\, 0,\, F/\sqrt{2}), \quad \boldsymbol{F}_2 = (F,\, 0,\, 0).$$

a) Kraftsumman är

$$\Sigma \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = (F - F/\sqrt{2},\, 0,\, F/\sqrt{2}).$$

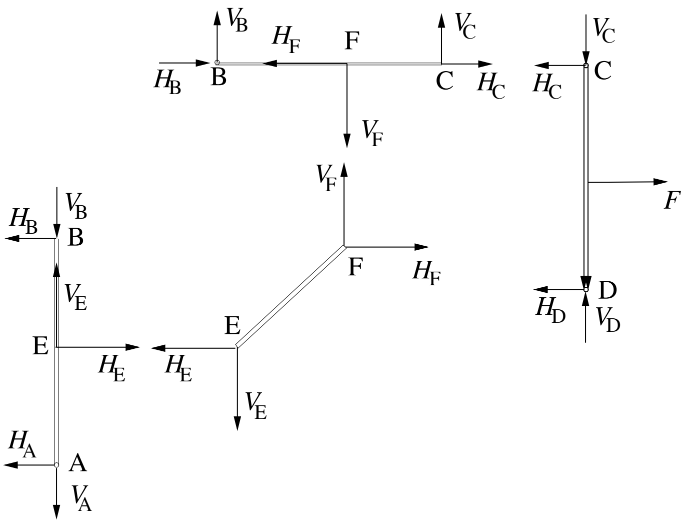
b) Momentsumman med avseende på origo är

$$\begin{aligned}
\Sigma \boldsymbol{M}_\mathrm{O} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \boldsymbol{F}_1 + \overrightarrow{\mathrm{OB}} \times \boldsymbol{F}_2 = \\
&= FL \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} + FL \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \\
&= (0,\, -FL/\sqrt{2},\, -FL).
\end{aligned}$$

c) Momentsumman med avseende på z-axeln är lika med z-komponenten av $\Sigma \boldsymbol{M}_\mathrm{O}$, d v s

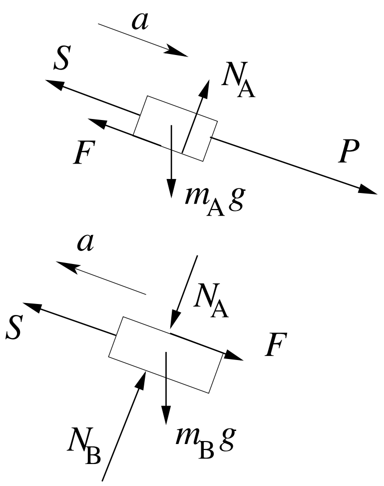
$$\Sigma M_z = -FL.$$

2.



Eftersom stången EF påverkas av ett tvåkraftsystem (en kraft i E och en i F), så kan kraftkomposanterna i E och F ersättas av sina resultanter, som måste ligga längs EF.

3.



Eftersom kropparna är förenade med linan, så har de lika stora accelerationer, men åt olika håll (se figuren). Kroppen A:

$$\searrow \qquad P + m_{\mathrm{A}} g \sin\alpha - S - F = m_{\mathrm{A}} a,$$
$$\nearrow \qquad N_{\mathrm{A}} - m_{\mathrm{A}} g \cos\alpha = 0.$$

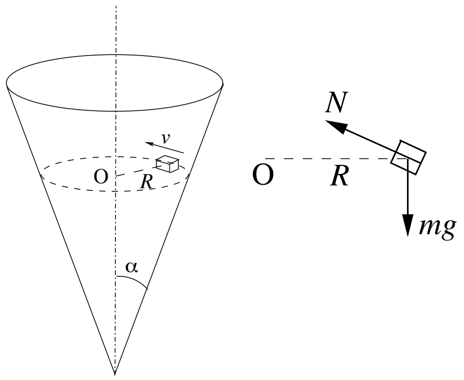
Kroppen B:

$$\nwarrow \qquad S - m_{\mathrm{B}} g \sin\alpha - F = m_{\mathrm{B}} a.$$

Eftersom kropparna glider relativt varandra gäller dessutom att

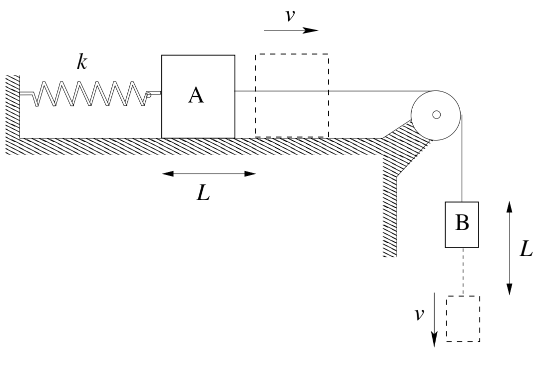
$$\frac{F}{N_{\mathrm{A}}} = \mu.$$

4.



$$\uparrow \qquad N \sin\alpha - mg = 0,$$
$$\leftarrow \qquad N \cos\alpha = m a_{\mathrm{n}} = m \frac{v^2}{R}.$$

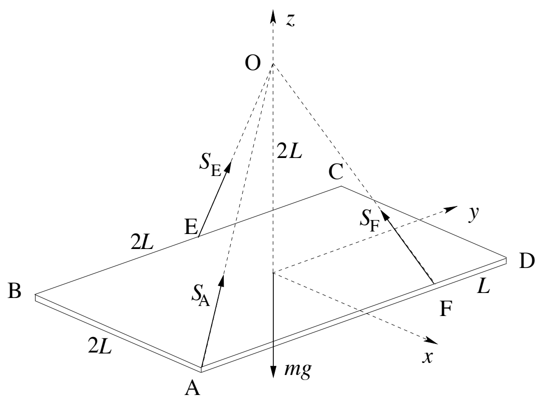
5.



De enda krafter som uträttar arbete är tyngdkraften på B och fjäderkraften. Eftersom dessa är konservativa, bevaras den mekaniska energin, d v s

$$\Delta T + \Delta V = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\frac{1}{2} m_{\mathrm{A}} v^2 + \frac{1}{2} m_{\mathrm{B}} v^2 + \frac{1}{2} k L^2 - m_{\mathrm{B}} g L = 0.$$

6.



Eftersom samtliga linkrafters verkningslinjer går genom O, och momentsumman med avseende på O är noll, så måste även tyngdkraftens verkningslinje gå genom O, d v s tyngdpunkten ligger rakt under O.

Linkrafterna uttrycks först på vektorform.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S}_{\mathrm{A}} &= S_{\mathrm{A}}\boldsymbol{e}_{\mathrm{AO}} = S_{\mathrm{A}}\frac{\overrightarrow{\mathrm{AO}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AO}}|} = S_{\mathrm{A}}\frac{(-L,\ 2L,\ 2L)}{\sqrt{L^2+(2L)^2+(2L)^2}} = \frac{S_{\mathrm{A}}}{3}(-1,\ 2,\ 2),\\
\boldsymbol{S}_{\mathrm{E}} &= S_{\mathrm{E}}\boldsymbol{e}_{\mathrm{EO}} = S_{\mathrm{E}}\frac{\overrightarrow{\mathrm{EO}}}{|\overrightarrow{\mathrm{EO}}|} = S_{\mathrm{E}}\frac{(L,\ 0,\ 2L)}{\sqrt{L^2+(2L)^2}} = \frac{S_{\mathrm{E}}}{\sqrt{5}}(1,\ 0,\ 2),\\
\boldsymbol{S}_{\mathrm{F}} &= S_{\mathrm{F}}\boldsymbol{e}_{\mathrm{FO}} = S_{\mathrm{F}}\frac{\overrightarrow{\mathrm{FO}}}{|\overrightarrow{\mathrm{FO}}|} = S_{\mathrm{F}}\frac{(-L,\ -L,\ 2L)}{\sqrt{L^2+L^2+(2L)^2}} = \frac{S_{\mathrm{F}}}{\sqrt{6}}(-1,\ -1,\ 2).
\end{aligned}$$

Vid jämvikt är kraftsumman noll, d v s

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{A}} + \boldsymbol{S}_{\mathrm{E}} + \boldsymbol{S}_{\mathrm{F}} + (0,\ 0,\ -mg) = 0,$$

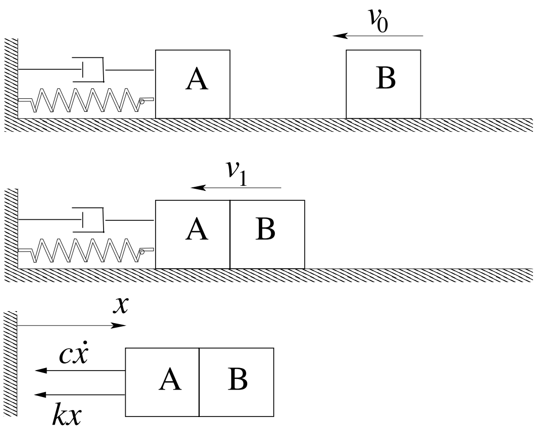
vilket ger ekvationssystemet

$$\begin{aligned}
-\frac{S_{\mathrm{A}}}{3} + \frac{S_{\mathrm{E}}}{\sqrt{5}} - \frac{S_{\mathrm{F}}}{\sqrt{6}} &= 0,\\
\frac{2S_{\mathrm{A}}}{3} - \frac{S_{\mathrm{F}}}{\sqrt{6}} &= 0,\\
\frac{2S_{\mathrm{A}}}{3} + \frac{2S_{\mathrm{E}}}{\sqrt{5}} + \frac{2S_{\mathrm{F}}}{\sqrt{6}} - mg &= 0.
\end{aligned}$$

Lösning av ekvationssystemet ger svaret:

$$S_{\mathrm{A}} = \frac{1}{4}mg, \quad S_{\mathrm{E}} = \frac{\sqrt{5}}{4}mg, \quad S_{\mathrm{F}} = \frac{\sqrt{6}}{6}mg.$$

7.



Under kollisionen mellan kropparna kan alla yttre horisontella krafter försummas. Detta betyder att systemets rörelsemängd bevaras, d v s

$$\leftarrow \quad 2mv_0 = 3mv_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{2}{3}v_0.$$

Därefter gäller:

$$\rightarrow \quad -kx - c\dot{x} = 3m\ddot{x}.$$

Med $c = 2\sqrt{km}$ fås

$$\ddot{x} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{k}{m}}\dot{x} + \frac{k}{3m}x = 0.$$

Substitutionen

$$2\zeta\omega = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{och} \quad \omega^2 = \frac{k}{3m}$$

ger

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{3m}} \quad \text{och} \quad \zeta = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Enligt formelsamling kan differentialekvationens allmänna lösning skrivas:

$$x = \mathrm{e}^{-\zeta\omega t}[C_1 \sin\omega_\mathrm{d}t + C_2\cos\omega_\mathrm{d}t].$$

Här är $\omega_\mathrm{d} = \omega\sqrt{1-\zeta^2} = \omega\sqrt{\frac{2}{3}}$.
Konstanterna C_1 och C_2 bestäms av begynnelsevillkoren $x = 0$ och $\dot{x} = -v_1$ för $t = 0$, vilket ger ekvationssystemet

$$\begin{aligned} C_2 &= 0, \\ -\frac{\omega}{\sqrt{3}}C_2 + C_1\omega_\mathrm{d} &= -v_1 \end{aligned}$$

med lösningen $C_1 = -v_1/\omega_\mathrm{d}$ och $C_2 = 0$. Insättning ger

$$x = -\frac{v_1}{\omega_\mathrm{d}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\sqrt{3}}\omega t}\sin\omega_\mathrm{d}t.$$

Derivering av uttrycket för x och insättning av villkoret $\dot{x} = 0$ ger

$$\frac{v_1\omega}{\omega_\mathrm{d}\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\sqrt{3}}\omega t}\sin\omega_\mathrm{d}t - v_1\mathrm{e}^{-\frac{1}{\sqrt{3}}\omega t}\cos\omega_\mathrm{d}t = 0,$$

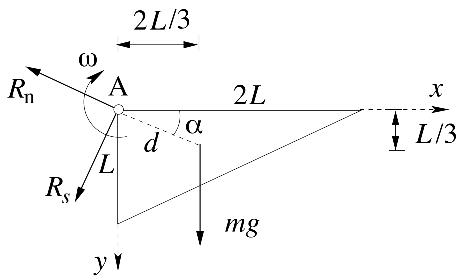
vilket ger

$$\tan\omega_\mathrm{d}t = \sqrt{2}.$$

Första vändläget svarar mot att

$$t = \frac{1}{\omega_\mathrm{d}}\arctan\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad t = 3\sqrt{\frac{m}{2k}}\arctan\sqrt{2} \quad (\text{oberoende av } v_0).$$

8.



$$\nwarrow \qquad R_{\mathrm{n}} - mg\sin\alpha = m\bar{a}_{\mathrm{n}} = md\omega^2 = 0$$
$$\swarrow \qquad R_s + mg\cos\alpha = m\bar{a}_s = md\dot{\omega}.$$

eftersom $\omega = 0$ i startögonblicket.
Här är $d = \sqrt{5}L/3$, $\sin\alpha = 1/\sqrt{5}$ och $\cos\alpha = 2/\sqrt{5}$.

$$\overset{\curvearrowright}{\mathrm{A}} \quad mg\frac{2L}{3} = I_{\mathrm{A}}\dot{\omega}.$$

För en tunn skiva är tröghetsmomentet $I_{\mathrm{A}} = I_x + I_y$, där I_x och I_y fås ur formelsamling. Man finner att

$$I_{\mathrm{A}} = \frac{m(2L)^2}{6} + \frac{mL^2}{6} = \frac{5}{6}mL^2.$$

Ur ekvationerna ovan fås

$$R_{\mathrm{n}} = \cdots = \frac{1}{\sqrt{5}}mg \quad \text{och} \quad R_s = \cdots - \frac{2}{3\sqrt{5}}mg.$$

Kraftens belopp fås till sist som

$$|\boldsymbol{R}| = \sqrt{R_{\mathrm{n}}^2 + R_s^2} = \sqrt{\frac{13}{45}}mg.$$