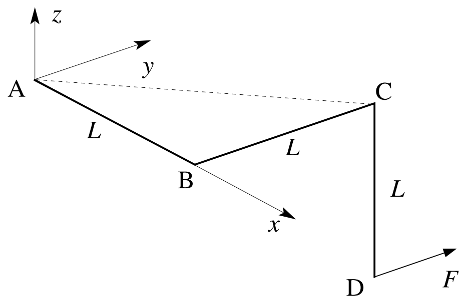
Mekanik V och AT 080602, lösningsförslag

1.



a) Kraften kan skrivas som

$$\boldsymbol{F} = (0,\, F,\, 0).$$

Momentet m a p punkten A fås som

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_{\mathrm{A}} &= \overrightarrow{\mathrm{AD}} \times \boldsymbol{F} = (L,\, L,\, -L) \times (0,\, F,\, 0) = \\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ L & L & -L \\ 0 & F & 0 \end{vmatrix} = (FL,\, 0,\, FL).\end{aligned}$$

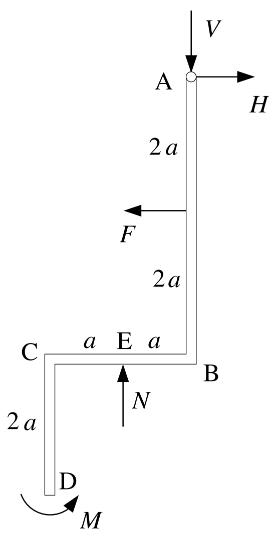
b) $M_{\mathrm{AC}} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{A}} \cdot \boldsymbol{e}_{\mathrm{AC}}$, där $\boldsymbol{e}_{\mathrm{AC}}$ är en enhetsvektor längs axeln AC, d v s

$$\boldsymbol{e}_{\mathrm{AC}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0),$$

vilket ger

$$M_{\mathrm{AC}} = \frac{FL}{\sqrt{2}}.$$

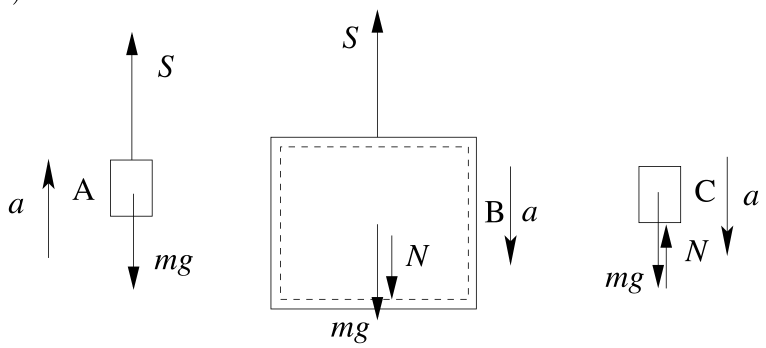
2.



$$\begin{aligned}&\rightarrow && H - F = 0,\\ &\uparrow && N - V = 0,\\ &\overset{\curvearrowleft}{\mathrm{A}} && M - F \cdot 2a - Na = 0.\end{aligned}$$

3.

a)



b) Alla kropparna måste ha samma acceleration a (se figuren).

Kroppen A:

$$\uparrow \quad S - mg = ma.$$

Kroppen B:

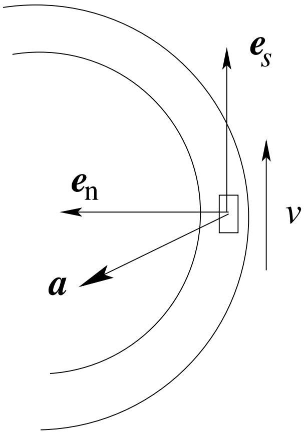
$$\downarrow \quad mg + N - S = ma.$$

Kroppen C:

$$\downarrow \quad mg - N = ma.$$

Ur dessa ekvationer kan S, N och a bestämmas.

4.



a) Radien $R = 100\,\mathrm{m}$.
Accelerationens normal- och tangentialkomponenter fås som

$$\begin{aligned} a_\mathrm{n} &= \frac{v^2}{R} = 4\,\mathrm{m/s^2}, \\ a_s &= \dot{v} = -3\,\mathrm{m/s^2}. \end{aligned}$$

Accelerationens belopp fås som

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_\mathrm{n}^2 + a_s^2} = 5\,\mathrm{m/s^2}.$$

Accelerationsvektorns ungefärliga riktning ges i figuren.
b) Den enda kraft som ligger i vägbanans plan är friktionskraften. Då är friktionskraftens belopp

$$|\boldsymbol{F}| = m|\boldsymbol{a}| = 6\,\mathrm{kN}.$$

5.

a) Då kulan bromsas in av lådan kan yttre krafterna på systemet kula + låda försummas, vilket innebär att systemets rörelsemängd bevaras. Detta ger att

$$mv = (m + 999m)v_1,$$

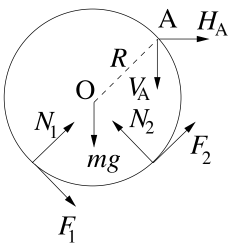
där v_1 är systemets hastighet sedan kulan bromsats upp, d v s

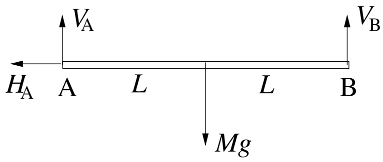
$$v_1 = \frac{v}{1000}.$$

b) Förlusten i rörelseenergi är

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2} \cdot 1000mv_1^2 = 0,4995mv^2.$$

6.





Stången:

$$\begin{array}{ll} \leftarrow & H_A = 0, \\ \overset{\frown}{\mathrm{B}} & V_A \cdot 2L - MgL = 0. \end{array}$$

Cylindern:

$$\begin{array}{ll} \nearrow & N_1 + F_2 - \dfrac{mg}{\sqrt{2}} - \dfrac{V_A}{\sqrt{2}} + \dfrac{H_A}{\sqrt{2}} = 0, \\ \nwarrow & N_2 - F_1 - \dfrac{mg}{\sqrt{2}} - \dfrac{V_A}{\sqrt{2}} - \dfrac{H_A}{\sqrt{2}} = 0, \\ \overset{\frown}{\mathrm{O}} & V_A \dfrac{R}{\sqrt{2}} + H_A \dfrac{R}{\sqrt{2}} - F_1 R - F_2 R = 0. \end{array}$$

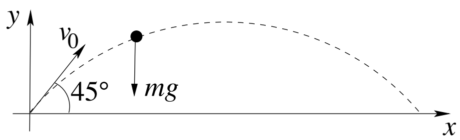
På gränsen till glidning gäller:

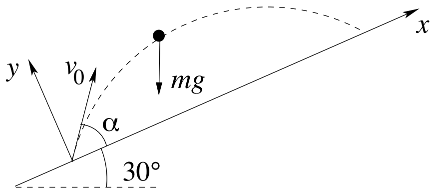
$$\frac{F_1}{N_1} = 0,50, \qquad \frac{F_2}{N_2} = 0,50.$$

Lösning av ekvationssystemet ger:

$$M = 8m.$$

7.





Vid plant underlag får det betraktas som känt att maximal kastlängd fås då elevationsvinkeln är 45°.

$$\begin{aligned} \rightarrow &\qquad 0 = m\ddot{x}, \\ \uparrow &\qquad -mg = m\ddot{y}. \end{aligned}$$

Efter integration och användning av begynnelsevillkoren $\dot{x} = v_0/\sqrt{2}$ och $\dot{y} = v_0/\sqrt{2}$ för $t = 0$ fås

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{v_0}{\sqrt{2}}, \\ \dot{y} &= -gt + \frac{v_0}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Ytterligare en integration ger tillsammans med begynnelsevillkoren $x = y = 0$ för $t = 0$

$$\begin{aligned} x &= \frac{v_0}{\sqrt{2}}t, \\ y &= -\frac{gt^2}{2} + \frac{v_0}{\sqrt{2}}t. \end{aligned}$$

För att bestämma utgångshastigheten v_0 utnyttjar vi att $y = 0$ och $x = L$ för $t = t_1$, där t_1 betecknar den tid då projektilen landar. Vi får då:

$$t_1 = \frac{v_0\sqrt{2}}{g} \quad \text{och} \quad v_0 = \sqrt{gL}.$$

För fallet med lutande plan är den elevationsvinkel som svarar mot maximal kastlängd (sannolikt) inte känd utan måste bestämmas.

$$\begin{aligned} \nearrow &\qquad -mg\sin 30^\circ = m\ddot{x} &\Rightarrow &\qquad \ddot{x} = -\frac{g}{2}, \\ \nwarrow &\qquad -mg\cos 30^\circ = m\ddot{y} &\Rightarrow &\qquad \ddot{y} = -\frac{g\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Efter integration och användning av begynnelsevillkoren $\dot{x} = v_0\cos\alpha$ och $\dot{y} = v_0\sin\alpha$ för $t = 0$ fås

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{gt}{2} + v_0\cos\alpha, \\ \dot{y} &= -\frac{gt\sqrt{3}}{2} + v_0\sin\alpha. \end{aligned}$$

Ytterligare en integration ger tillsammans med begynnelsevillkoren $x = y = 0$ för $t = 0$

$$\begin{aligned} x &= -\frac{g}{4}t^2 + v_0 t\cos\alpha, \\ y &= -\frac{g\sqrt{3}}{4}t^2 + v_0 t\sin\alpha. \end{aligned}$$

Projektilen landar då $y = 0$. Då är

$$t = t_2 = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Insättning av $t = t_2$ i uttrycket för x ger kastlängden L_1 som funktion av α.

$$L_1 = -\frac{4v_0^2}{3g}\sin^2\alpha + \frac{4v_0^2}{g\sqrt{3}}\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{4}{3}L\sin^2\alpha + \frac{4}{\sqrt{3}}L\sin\alpha\cos\alpha.$$

För att bestämma det värde på α som svarar mot maximal kastlängd deriverar vi uttrycket för L_1 med avseende på α och sätter derivatan lika med noll:

$$\frac{\mathrm{d}L_1}{\mathrm{d}\alpha} = -\frac{8}{3}L\sin\alpha\cos\alpha + \frac{4}{\sqrt{3}}L\cos^2\alpha - \frac{4}{\sqrt{3}}L\sin^2\alpha = 0.$$

Efter division med $\cos^2\alpha$ och förenkling fås:

$$\tan^2\alpha + \frac{2}{\sqrt{3}}\tan\alpha - 1 = 0.$$

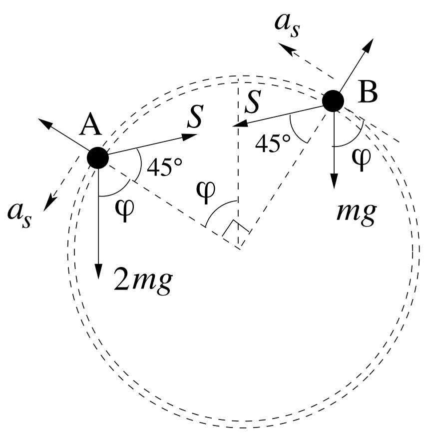
Andragradsekvationen har en positiv rot, nämligen

$$\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}. \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 30^\circ.$$

Maximal kastlängd fås till sist genom insättning i uttrycket för L_1 ovan:

$$L_{1,\max} = \frac{2}{3}L.$$

8.



Så länge linan är sträckt har kropparna samma fart och därmed också samma tangentialacceleration a_s.

$$\text{A}: \quad \swarrow \quad 2mg\sin\varphi - \frac{S}{\sqrt{2}} = 2ma_s,$$

$$\text{B}: \quad \nwarrow \quad -mg\cos\varphi + \frac{S}{\sqrt{2}} = ma_s,$$

som ger

$$S = \frac{2\sqrt{2}}{3}mg(\sin\varphi + \cos\varphi).$$