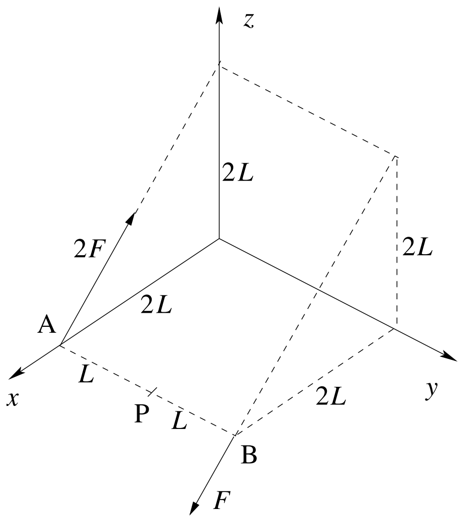
TME010 Mekanik 080326, lösningsförslag

1.



Eftersom ett moment inte ändras då en kraft förskjuts längs sin verkningslinje, kan angreppspunkten för den kraft som har beloppet F flyttas till B enligt figuren.
Krafterna kan uttryckas på vektorform som

$$\boldsymbol{F}_1 = 2F\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\, 0,\, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \boldsymbol{F}_2 = F\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\, 0,\, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

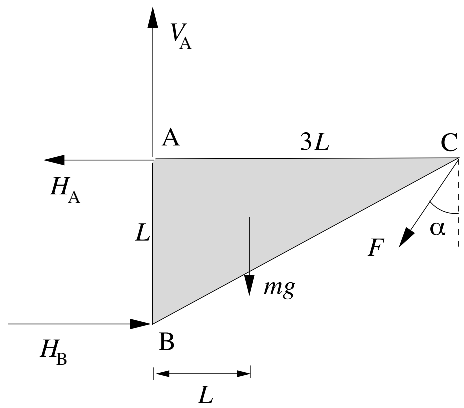
Krafternas momentsumma m a p P är

$$\Sigma \boldsymbol{M}_\mathrm{P} = \overrightarrow{\mathrm{PA}} \times \boldsymbol{F}_1 + \overrightarrow{\mathrm{PB}} \times \boldsymbol{F}_2 =$$

$$= \frac{2F}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 0 & -L & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \frac{F}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 0 & L & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

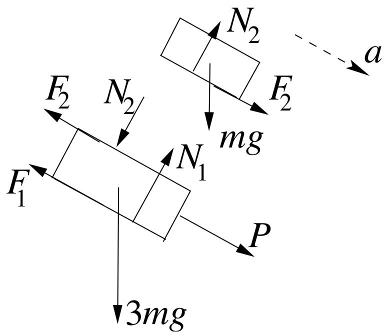
$$= \frac{3FL}{\sqrt{2}}(-1,\, 0,\, -1).$$

2.



$$\begin{aligned} &\uparrow && V_A - mg - F\cos\alpha = 0, \\ &\rightarrow && H_B - H_A - F\sin\alpha = 0, \\ &\overset{\frown}{\mathrm{A}} && mgL + F\cos\alpha \cdot 3L - H_B L = 0. \end{aligned}$$

3.



Eftersom kropparna inte glider relativt varandra, har de samma acceleration (a i figuren).
Kroppen A:

$$\searrow \qquad mg\sin\alpha + F_2 = ma,$$
$$\nearrow \qquad N_2 - mg\cos\alpha = 0.$$

Kroppen B:

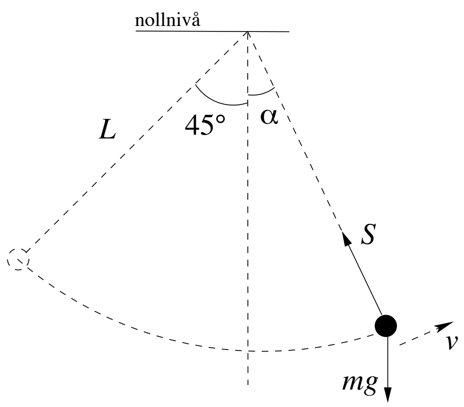
$$\searrow \qquad P + 3mg\sin\alpha - F_1 - F_2 = 3ma,$$
$$\nearrow \qquad N_1 - N_2 - 3mg\cos\alpha = 0.$$

Eftersom B glider utför det lutande planet, gäller dessutom att

$$\frac{F_1}{N_1} = \mu_1.$$

Dessa fem ekvationer är tillräckliga för att bestämma de fyra obekanta krafterna F_1, N_1, F_2 och N_2, samt accelerationen a.

4.



a)
Den enda kraft som uträttar arbete är tyngdkraften. Eftersom denna är konservativ, bevaras den mekaniska energin, vilket ger

$$-mg\frac{L}{\sqrt{2}} = -mgL\cos\alpha + \frac{mv^2}{2}.$$

Ur denna ekvation bestäms farten

$$v = \sqrt{2gL\left(\cos\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}.$$

b)

$$\nwarrow \qquad S - mg\cos\alpha = ma_{\rm n} = m\frac{v^2}{L},$$

där v ges av svaret i deluppgift a).

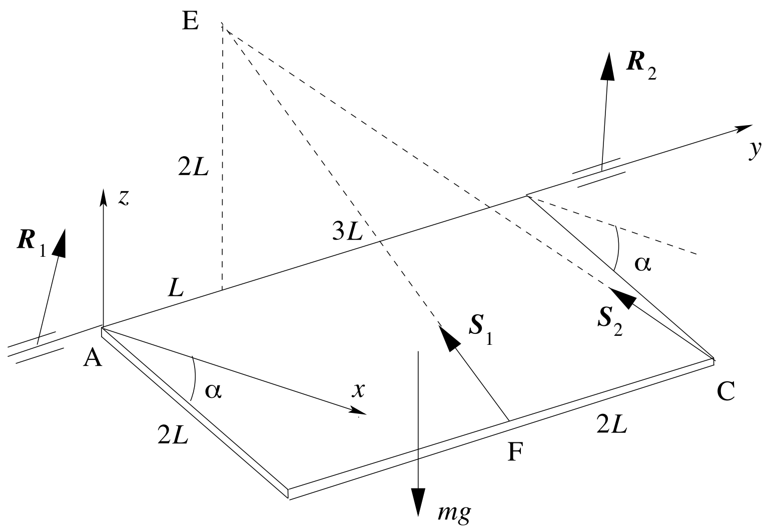
5.

De enda krafter som uträttar arbete är tyngdkraften och fjäderkraften. Eftersom båda är konservativa, bevaras den mekaniska energin. Den kinetiska energin är noll såväl i startläget som i det läge där fjädern är maximalt hoptryckt. Detta betyder att den potentiella energin är lika stor i dessa lägen. Om fjäderns maximala hoptryckning betecknas x, och nollnivån för tyngdkraften placeras där fjädern är hoptryckt, gäller då att

$$mg(L+x)\sin\alpha = \frac{kx^2}{2}.$$

Den ena av rötterna till denna andragradsekvation är den sökta lösningen. (Den andra roten svarar mot att kroppen fastnar i fjädern och börjar utföra en harmonisk svängningsrörelse med ett övre vändläge som bestäms av denna rot.)

6.



Enklast löses problemet genom att man utnyttjar att $\Sigma M_y = 0$, eftersom endast linkrafterna ($\boldsymbol{S}_1$ och $\boldsymbol{S}_2$ i figuren) och tyngdkraften bidrar till denna momentsumma.
Linkrafterna uttrycks först på komponentform:

$$\boldsymbol{S}_1 = S\boldsymbol{e}_{\mathrm{FE}} = S\frac{\overrightarrow{\mathrm{FE}}}{|\overrightarrow{\mathrm{FE}}|} = S\frac{(-2L\cos\alpha,\ -L,\ 2L+2L\sin\alpha)}{\sqrt{(2L\cos\alpha)^2 + L^2 + (2L+2L\sin\alpha)^2}} = \frac{S(-2\cos\alpha,\ -1,\ 2+2\sin\alpha)}{\sqrt{9+8\sin\alpha}}.$$

$$\boldsymbol{S}_2 = S\boldsymbol{e}_{\mathrm{CF}} = S\frac{\overrightarrow{\mathrm{CF}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CF}}|} = S\frac{(-2L\cos\alpha,\ -3L,\ 2L+2L\sin\alpha)}{\sqrt{(2L\cos\alpha)^2 + (3L)^2 + (2L+2L\sin\alpha)^2}} = \frac{S(-2\cos\alpha,\ -3,\ 2+2\sin\alpha)}{\sqrt{17+8\sin\alpha}}.$$

Observera att linkrafterna har samma belopp S, eftersom det är en och samma lina som löper genom den glatta öglan E.
För att bestämma linkrafternas bidrag till ΣM_y beräknas först momenten med avseende på origo:

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}} \times \boldsymbol{S}_1 = \frac{S}{\sqrt{9+8\sin\alpha}}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 2L\cos\alpha & 2L & -2L\sin\alpha \\ -2\cos\alpha & -1 & 2+2\sin\alpha \end{vmatrix} = \frac{SL}{\sqrt{9+8\sin\alpha}}(\ldots,\ -4\cos\alpha,\ \ldots).$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} \times \boldsymbol{S}_2 = \frac{S}{\sqrt{17+8\sin\alpha}}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 2L\cos\alpha & 4L & -2L\sin\alpha \\ -2\cos\alpha & -3 & 2+2\sin\alpha \end{vmatrix} = \frac{SL}{\sqrt{17+8\sin\alpha}}(\ldots,\ -4\cos\alpha,\ \ldots).$$

Eftersom vi enbart är intresserade av momentsumman med avseende på y-axeln, finns det ingen anledning att beräkna x- och z-komponenterna.
Villkoret $\Sigma M_y = 0$ ger

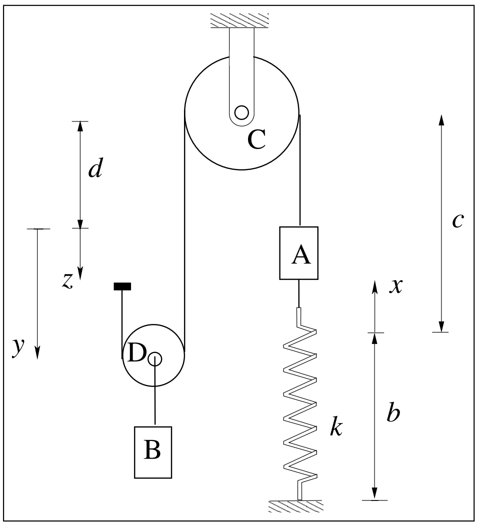
$$\frac{-4SL\cos\alpha}{\sqrt{9+8\sin\alpha}} + \frac{-4SL\cos\alpha}{\sqrt{17+8\sin\alpha}} + mgL\cos\alpha = 0,$$

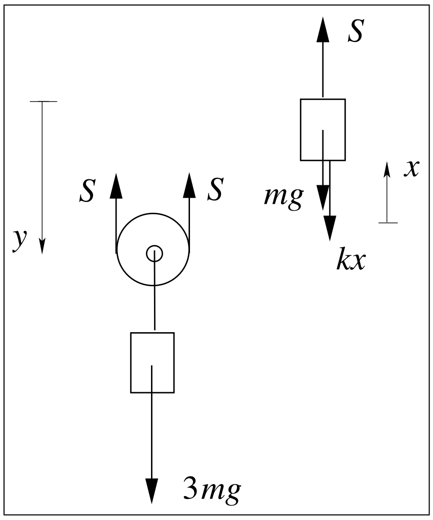
som ger svaret:

$$S = \left(\frac{1}{\sqrt{9+8\sin\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{17+8\sin\alpha}}\right)\frac{mg}{4}.$$

7.

Vi inför först geometriska beteckningar enligt den vänstra figuren nedan. I den högra figuren visas kropparna A och B frilagda.





Eftersom linans längd är konstant, gäller sambandet

$$y - z + d + y + c - x = \text{konstant},$$

d v s

$$x = 2y - z + \text{konstant},$$

vilket ger

$$\ddot{x} = 2\ddot{y} - \ddot{z}.$$

Kroppen B (inklusive trissan):

$$\downarrow \quad -2S + 3mg = 3m\ddot{y}.$$

Kroppen A:

$$\uparrow \quad S - kx - mg = m\ddot{x}.$$

Ur ekvationerna ovan fås efter eliminering av S, x och $\ddot{x}$:

$$\ddot{y} + \frac{4k}{7m}y = \frac{2}{7}\ddot{z} + \frac{2k}{7m}z + C = -\frac{2}{7}\Omega^2 z_0 \sin\Omega t + \frac{2k}{7m}z_0 \sin\Omega t + C,$$

där C är en konstant. Ansatsen

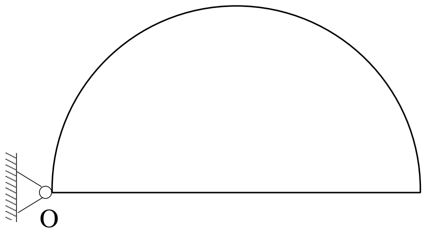
$$y = A\sin\Omega t + B$$

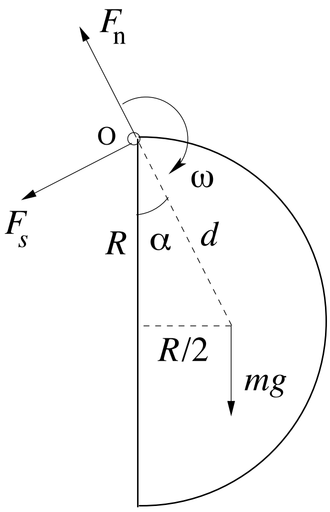
ger efter identifiering av koefficienterna för $\sin\Omega t$

$$A = \frac{2(k - m\Omega^2)}{4k - 7m\Omega^2}z_0.$$

Den sökta amplituden är $|A|$.

8.





Den enda kraft som uträttar arbete är tyngdkraften, vilket innebär att energin bevaras:

$$mg\frac{R}{2} = \frac{1}{2}I_{\mathrm{O}}\omega^2 - mgR.$$

I det andra läget ger lagen för rörelsemängdsmomentet m a p axeln O

$$mg\frac{R}{2} = I_{\mathrm{O}}\dot{\omega}.$$

Tröghetsmomentet fås m h a formelsamling och Steiners sats som

$$I_{\mathrm{O}} = \frac{2}{3}mR^2 + md^2 = \frac{2}{3}mR^2 + m\left(R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2\right) = \frac{5}{3}mR^2,$$

vilket efter insättning ger:

$$\omega^2 = \frac{9g}{5R}, \qquad \dot{\omega} = \frac{3g}{10R}.$$

Lagen för tyngdpunktens rörelse ger:

$$\nwarrow \quad F_{\mathrm{n}} - mg\cos\alpha = ma_{\mathrm{n}} = md\omega^2,$$
$$\swarrow \quad F_s + mg\sin\alpha = ma_s = md\dot{\omega}.$$

Med

$$d = \frac{\sqrt{5}}{2}R, \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

fås

$$F_{\mathrm{n}} = \frac{13}{2\sqrt{5}}mg, \qquad F_s = -\frac{1}{\sqrt{5}}mg.$$

Reaktionskraftens belopp fås slutligen som

$$\sqrt{F_{\mathrm{n}}^2 + F_s^2} = \sqrt{\frac{173}{20}}mg.$$