# TME010 Mekanik 071218, lösningsförslag

**1.**

a) Momentet m a p punkten Q bestäms som

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{Q}} = \overrightarrow{\mathrm{QP}} \times \boldsymbol{P}.$$

där

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}} = (4L - L,\, L - 0,\, -L - (-2L)) = (3L,\, L,\, L)$$

och

$$\boldsymbol{P} = (2F,\, -F,\, 0).$$

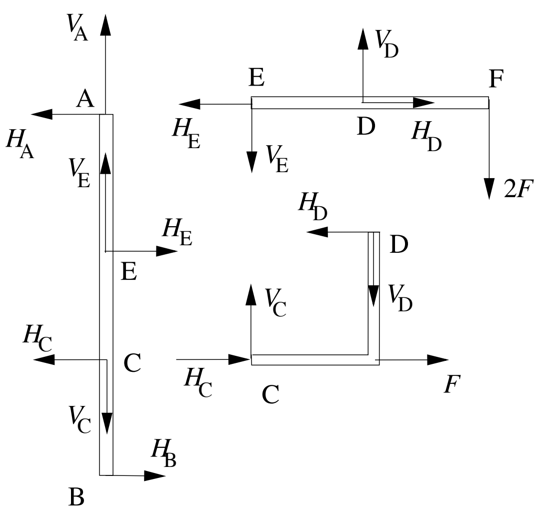
Momentet blir då

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{Q}} = FL \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = FL(1,\, 2,\, -5).$$

b) Momentet m a p en axel genom Q parallell med $y$-axeln är lika med $y$-komponenten av $\boldsymbol{M}_{\mathrm{Q}}$, d v s

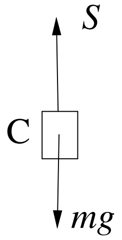
$$M_{\mathrm{Q}y} = 2FL.$$

**2.**

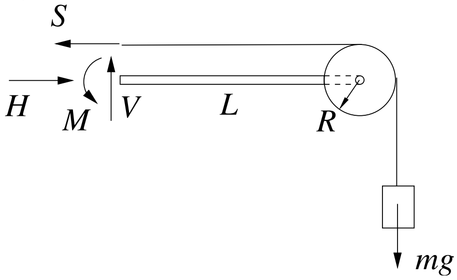


**3.**

a)




b)




c)

Lasten C:

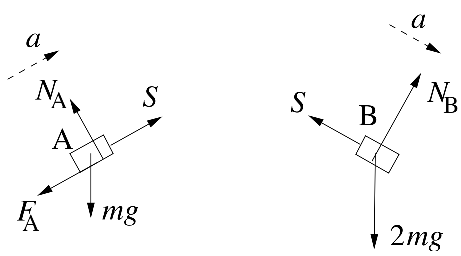
$$\uparrow \quad S - mg = 0$$

Hela systemet:

$$\begin{aligned}
&\uparrow && V - mg = 0,\\
&\rightarrow && H - S = 0,\\
&\overset{\curvearrowright}{\mathrm{A}} && mg(L+R) - SR - M = 0.
\end{aligned}$$

**4.**

a)




b)

Kroppen A:

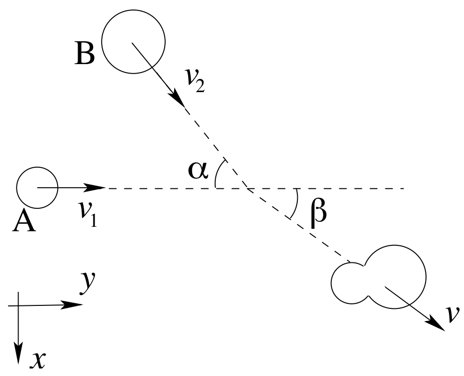
$$\begin{aligned}
&\nwarrow && N_{\mathrm{A}} - mg\cos\alpha = 0,\\
&\nearrow && S - F_{\mathrm{A}} - mg\sin\alpha = ma.
\end{aligned}$$

Glidning i kontaktytan: $\quad F_{\mathrm{A}}/N_{\mathrm{A}} = \mu.$

Kroppen B:

$$\begin{aligned}
&\nearrow && N_{\mathrm{B}} - 2mg\cos\alpha = 0,\\
&\searrow && 2mg\sin\alpha - S = 2ma.
\end{aligned}$$

**5.**

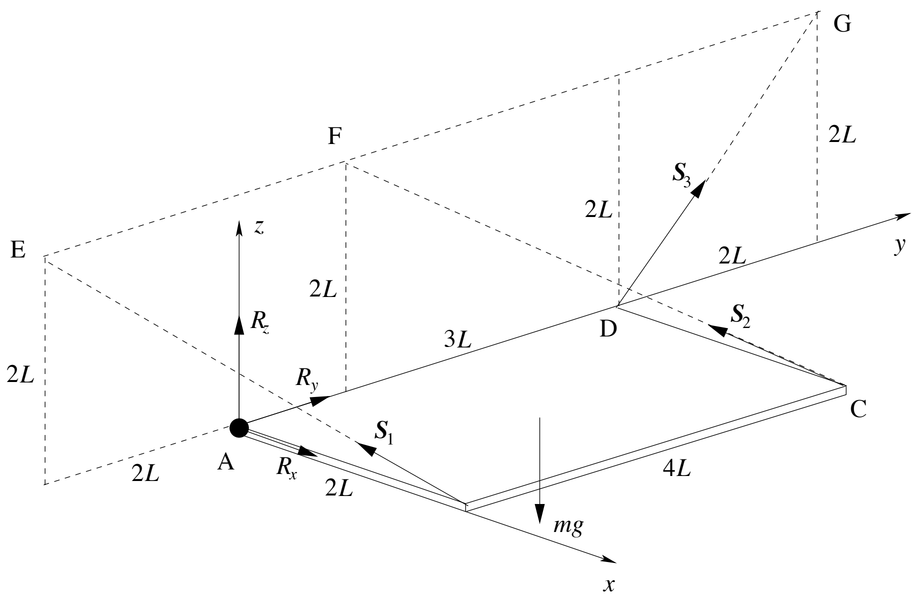



Eftersom inga yttre horisontella krafter verkar på systemet A + B, bevaras rörelsemängdens $x$- och $y$-komponenter. Då fås

$$\downarrow \qquad 2mv_2 \sin\alpha = 3mv \sin\beta,$$
$$\rightarrow \qquad mv_1 + 2mv_2 \cos\alpha = 3mv \cos\beta.$$

Här är $v$ den sammansatta kroppens fart.

**6.**




Linkrafterna uttrycks först på komponentform:

$$\boldsymbol{S}_1 = S_1 \boldsymbol{e}_{\mathrm{BE}} = S_1 \frac{\overrightarrow{\mathrm{BE}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|} = S_1 \frac{(-2L,\, -2L,\, 2L)}{\sqrt{4L^2 + 4L^2 + 4L^2}} = \frac{S_1}{\sqrt{3}}(-1,\, -1,\, 1).$$

$$\boldsymbol{S}_2 = S_2 \boldsymbol{e}_{\mathrm{CF}} = S_2 \frac{\overrightarrow{\mathrm{CF}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CF}}|} = S_2 \frac{(-2L,\, -3L,\, 2L)}{\sqrt{4L^2 + 9L^2 + 4L^2}} = \frac{S_2}{\sqrt{17}}(-2,\, -3,\, 2).$$

$$\boldsymbol{S}_3 = S_3 \boldsymbol{e}_{\mathrm{DG}} = S_3 \frac{\overrightarrow{\mathrm{DG}}}{|\overrightarrow{\mathrm{DG}}|} = S_3 \frac{(0,\, 2L,\, 2L)}{\sqrt{4L^2 + 4L^2}} = \frac{S_3}{\sqrt{2}}(0,\, 1,\, 1).$$

a)

$$\Sigma \boldsymbol{M}_{\mathrm{A}} = 0: \quad \begin{aligned}[t] &\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \boldsymbol{S}_1 + \overrightarrow{\mathrm{AC}} \times \boldsymbol{S}_2 + \overrightarrow{\mathrm{AD}} \times \boldsymbol{S}_3 + (L,\, 2L,\, 0) \times (0,\, 0,\, -mg) = \cdots = \\ &\frac{S_1 L}{\sqrt{3}}(0,\, -2,\, -2) + \frac{S_2 L}{\sqrt{17}}(8,\, -4,\, 2) + \frac{S_3 L}{\sqrt{2}}(4,\, 0,\, 0) + mgL(-2,\, 1,\, 0) = 0. \end{aligned}$$

d v s

$$\begin{aligned} 8\frac{S_2 L}{\sqrt{17}} + 4\frac{S_3 L}{\sqrt{2}} - 2mgL &= 0, \\ -2\frac{S_1 L}{\sqrt{3}} - 4\frac{S_2 L}{\sqrt{17}} + mgL &= 0, \\ -2\frac{S_1 L}{\sqrt{3}} + 2\frac{S_2 L}{\sqrt{17}} &= 0. \end{aligned}$$

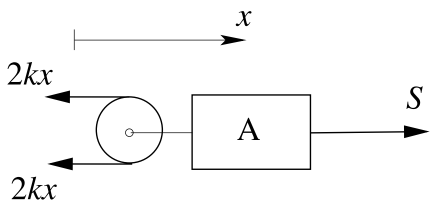
Lösning av ekvationssystemet ger svaret:

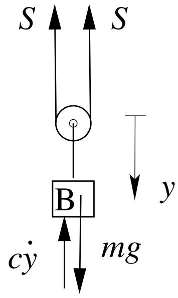
$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}mg, \quad S_2 = \frac{\sqrt{17}}{6}mg, \quad S_3 = \frac{\sqrt{2}}{6}mg.$$

b)

$$\begin{aligned} &\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad R_x - \frac{S_1}{\sqrt{3}} - 2\frac{S_2}{\sqrt{17}} = 0 && \Rightarrow \quad R_x = \tfrac{1}{2}mg. \\ &\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad R_y - \frac{S_1}{\sqrt{3}} - 3\frac{S_2}{\sqrt{17}} + \frac{S_3}{\sqrt{2}} = 0 && \Rightarrow \quad R_y = \tfrac{1}{2}mg, \\ &\Sigma F_z = 0 \quad \Rightarrow \quad R_z + \frac{S_1}{\sqrt{3}} + 2\frac{S_2}{\sqrt{17}} + \frac{S_3}{\sqrt{2}} - mg = 0 && \Rightarrow \quad R_z = \tfrac{1}{3}mg. \end{aligned}$$

**7.**




Om kroppen A förskjuts en sträcka $x$ åt höger från det läge där fjädern är ospänd, så förlängs fjädern $2x$.
Kroppen A:

$$\rightarrow \quad S - 4kx = 5m\ddot{x}.$$

Kroppen B:

$$\downarrow \quad mg - 2S - c\dot{y} = m\ddot{y}.$$

Kinematiskt samband:
$\dot{x} = 2\dot{y} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = 2\ddot{y}.$

Genom att eliminera $S$, $\dot{y}$ och $\ddot{y}$ ur ekvationerna finner man att

$$\ddot{x} + \frac{8}{21}\sqrt{\frac{k}{m}}\dot{x} + \frac{16k}{21m}x = \text{konstant}.$$

Sätt

$$\omega = \sqrt{\frac{16k}{21m}} \quad \text{och} \quad 2\zeta\omega = \frac{8}{21}\sqrt{\frac{k}{m}},$$

d v s

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{21}}.$$

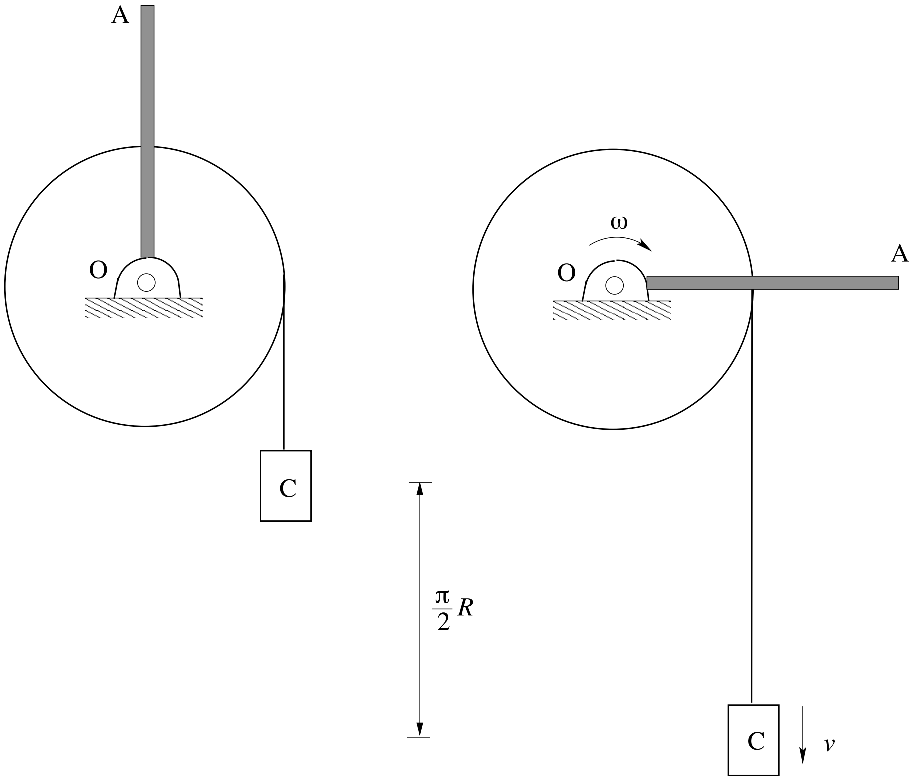
Detta är ekvationen för en svagt dämpad svängningsrörelse med vinkelfrekvensen

$$\omega_{\mathrm{d}} = \omega\sqrt{1-\zeta^2} = \cdots = \frac{8}{21}\sqrt{\frac{5k}{m}}$$

och svängningstiden

$$\tau_{\mathrm{d}} = \frac{2\pi}{\omega_{\mathrm{d}}} = \frac{21\pi}{4}\sqrt{\frac{m}{5k}}.$$

**8.**




De enda krafter som uträttar arbete är tyngdkrafterna på OA och C, vilket innebär att energin bevaras. d v s

$$\Delta T + \Delta V = 0,$$

vilket ger att

$$\frac{1}{2}I_{\mathrm{O}}\omega^2 + \frac{1}{2}2mv^2 - 2mg\frac{\pi}{2}R - mgR = 0.$$

Tröghetsmomentet fås m h a formelsamling som

$$I_{\mathrm{O}} = \frac{1}{2}5mR^2 + \frac{1}{3}m(2R)^2 = \frac{23}{6}mR^2.$$

C:s hastighet och hjulets rotationshastighet är kopplade via sambandet

$$v = R\omega.$$

Efter förenkling fås svaret

$$v = \sqrt{\frac{12(1+\pi)}{35}gR}.$$