Mekanik Z 070829, lösningsförslag

1.

Kraftvektorn kan skrivas som

$$\boldsymbol{F} = F\boldsymbol{e}_{\mathrm{PQ}},$$

där $\boldsymbol{e}_{\mathrm{PQ}}$ är en enhetsvektor riktad längs kraftens verkningslinje PQ. Denna kan bestämmas som

$$\boldsymbol{e}_{\mathrm{PQ}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|}.$$

Här är

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (L - 3L,\ -L - 0,\ L - (-L)) = (-2L,\ -L,\ 2L),$$

vilket ger

$$\boldsymbol{e}_{\mathrm{PQ}} = \frac{(-2,\ -1,\ 2)}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{1}{3}(-2,\ -1,\ 2),$$

Momentet m a p punkten A bestäms som

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{A}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} \times \boldsymbol{F}.$$

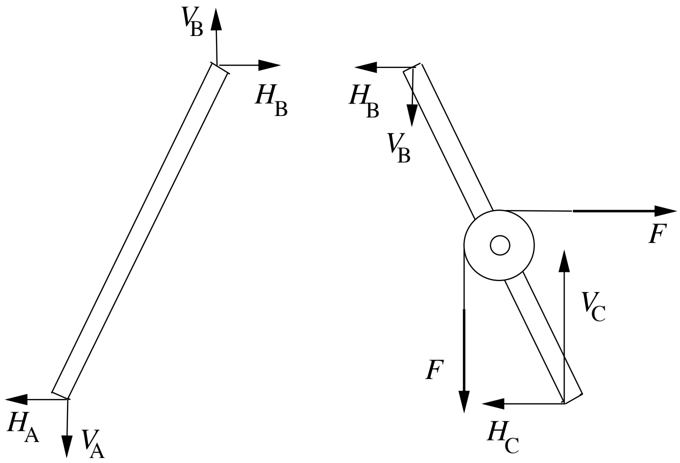
där

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (3L - 2L,\ 0 - L,\ -L - (-L)) = (L,\ -L,\ 0).$$

Momentet blir då

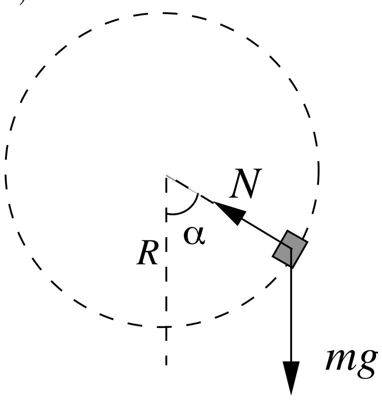
$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{A}} = \frac{FL}{3}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{FL}{3}(-2,\ -2,\ -3).$$

2.



3.

a)



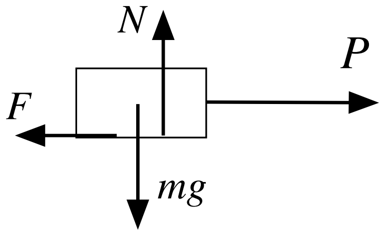
b)

$$\nwarrow \qquad N - mg\cos\alpha = m\frac{v_0^2}{R},$$

$$\swarrow \qquad mg\sin\alpha = ma_s.$$

4.

a)



b)
Kroppen A:

$$\uparrow \quad N - mg = 0.$$

Glidning i kontaktytan: $F/N = \mu$.
Alltså är friktionskraften $F = \mu mg$.
Det totala arbete som uträttas är då

$$W = (P - \mu mg)L.$$

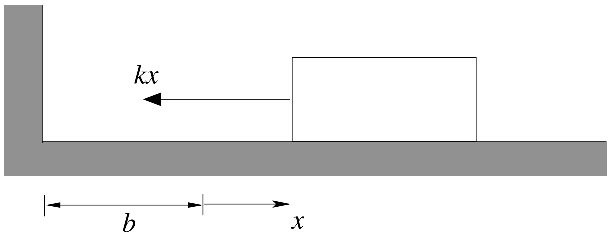
c)
Lagen för den kinetiska energin ger

$$(P - \mu mg)L = \frac{1}{2}mv^2,$$

där v är den sökta farten.

5.
a) Kroppens svängningscentrum ligger i jämviktsläget, d v s där fjädern är ospänd. Eftersom kroppen släpps från vila, befinner den sig då i sitt ena vändläge, Detta innebär att amplituden är L.

b)



$$\rightarrow \quad -kx = m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Detta är ekvationen för en harmonisk svängningsrörelse med vinkelfrekvensen

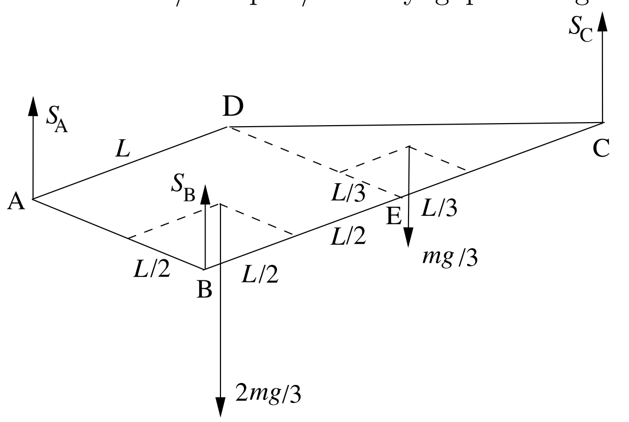
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

c) Svängningstiden bestäms ur vinkelfrekvensen m h a sambandet

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

6.

Skivan kan ses som sammansatt av en kvadrat ABED och en rätvinklig triangel DEC med massorna $2m/3$ resp $m/3$ och tyngdpunktslägen enligt figuren nedan.



$$\Sigma \boldsymbol{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_A + S_B + S_C - mg = 0,$$

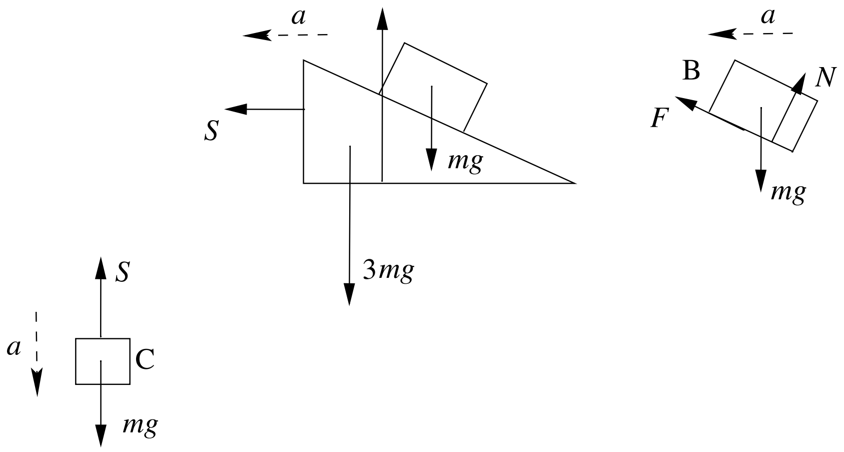
$$\Sigma M_{BC} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_A L - \frac{2}{3}mg\frac{L}{2} - \frac{1}{3}mg\frac{L}{3} = 0.$$

$$\Sigma M_{AB} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_C \cdot 2L - \frac{2}{3}mg\frac{L}{2} - \frac{1}{3}mg\frac{4L}{3} = 0.$$

Lösning av ekvationssystemet ger svaret:

$$S_A = \frac{4}{9}mg, \quad S_B = \frac{1}{6}mg, \quad S_C = \frac{7}{18}mg.$$

7.



Kroppen C:

$$\downarrow \quad mg - S = ma.$$

Kropparna A och B tillsammans:

$$\leftarrow \quad S = 4ma.$$

Ur ekvationerna ovan följer att

$$a = \frac{1}{5}g.$$

Kroppen B:

$$\begin{aligned} &\leftarrow \qquad F\cos 20^\circ - N\sin 20^\circ = ma, \\ &\uparrow \qquad F\sin 20^\circ + N\cos 20^\circ - mg = 0. \end{aligned}$$

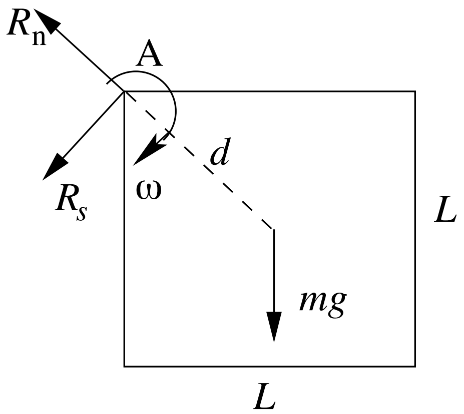
Lösning av ekvationssystemet ger

$$F = (\sin 20^\circ + \frac{1}{5}\cos 20^\circ)mg, \quad N = (\cos 20^\circ - \frac{1}{5}\sin 20^\circ)mg.$$

För att B inte skall glida relativt A krävs att friktionskoefficienten

$$\mu > \frac{F}{N} = \cdots = \frac{5\tan 20^\circ + 1}{5 - \tan 20^\circ} \approx 0,61.$$

8.



Lagen för tyngdpunktens rörelse ger:

$$\nwarrow \quad R_{\mathrm{n}} - \frac{mg}{\sqrt{2}} = m\bar{a}_{\mathrm{n}} = md\omega^2,$$

$$\swarrow \quad R_s + \frac{mg}{\sqrt{2}} = m\bar{a}_s = md\dot{\omega},$$

där tyngdpunktsavståndet $d = L/\sqrt{2}$.
Eftersom rörelsen startar från vila är ω lika med noll. Vinkelaccelerationen $\dot{\omega}$ fås ur lagen för rörelsemängdsmomentet med avseende på axeln A:

$$\overset{\curvearrowright}{\mathrm{A}} \quad mg\frac{L}{2} = I_{\mathrm{A}}\dot{\omega}.$$

Tröghetsmomentet med avseende på axeln A fås med hjälp av formelsamling och Steiners sats som

$$I_{\mathrm{A}} = \frac{1}{12}m(L^2 + L^2) + md^2 = \frac{2}{3}mL^2.$$

Man finner att

$$\dot{\omega} = \frac{3g}{4L},$$

Insättning i lagen för tyngdpunktens rörelse ger

$$\begin{aligned} R_{\mathrm{n}} &= \frac{mg}{\sqrt{2}}, \\ R_s &= -\frac{mg}{4\sqrt{2}}. \end{aligned}$$