Mekanik Z 070411, lösningsförslag

1.

a) Krafterna kan skrivas som

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_1 &= (0,\, -F,\, 0), \\ \boldsymbol{F}_2 &= (0,\, 0,\, -F). \end{aligned}$$

Motsvarande angreppspunkter är

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_1 &= (0,\, L,\, L), \\ \boldsymbol{r}_2 &= (L,\, 0,\, L). \end{aligned}$$

Momentsumman m a p axeln OP kan beräknas som

$$\Sigma M_{\mathrm{OP}} = (\Sigma \boldsymbol{M}_{\mathrm{O}}) \cdot \boldsymbol{e}_{\mathrm{OP}}, \tag{1}$$

där $\Sigma \boldsymbol{M}_{\mathrm{O}}$ är systemets momentsumma med avvseende på punkten O, och $\boldsymbol{e}_{\mathrm{OP}}$ är en enhetsvektor längs OP.

$$\begin{aligned} \Sigma \boldsymbol{M}_{\mathrm{O}} &= \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 0 & L & L \\ 0 & -F & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ L & 0 & L \\ 0 & 0 & -F \end{vmatrix} = \\ &= (FL,\, 0,\, 0) + (0,\, FL,\, 0) = (FL,\, FL,\, 0). \end{aligned}$$

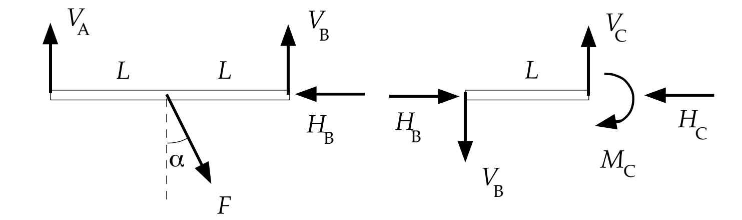
Enhetsvektorn $\boldsymbol{e}_{\mathrm{OP}}$ bestäms ur sambandet

$$\boldsymbol{e}_{\mathrm{OP}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|} = \frac{(L, L, 0)}{\sqrt{L^2 + L^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0).$$

Insättning i ekv (1) ger den sökta momentsumman

$$\Sigma M_{\mathrm{OP}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(FL,\, FL,\, 0) \cdot (1, 1, 0) = \sqrt{2} FL.$$

2.



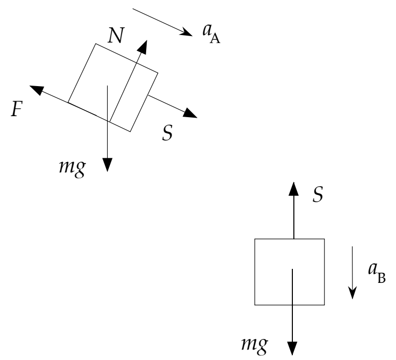
Balken AB

Balken BC

$$
\begin{array}{ll}
\leftarrow & H_{\mathrm{B}} - F\sin\alpha = 0, \\
\uparrow & V_{\mathrm{A}} + V_{\mathrm{B}} - F\cos\alpha = 0, \\
\overset{\curvearrowright}{\mathrm{A}} & F\cos\alpha \cdot L - V_{\mathrm{B}} \cdot 2L = 0.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\leftarrow & H_{\mathrm{C}} - H_{\mathrm{B}} = 0, \\
\uparrow & V_{\mathrm{C}} - V_{\mathrm{B}} = 0, \\
\overset{\curvearrowright}{\mathrm{B}} & M_{\mathrm{C}} - V_{\mathrm{C}}L = 0.
\end{array}
$$

3.



Kroppen A:

$$
\begin{array}{ll}
\searrow & mg\sin\alpha + S - F = ma_{\mathrm{A}}, \\
\nearrow & N - mg\cos\alpha = 0.
\end{array}
$$

Glidning i kontaktytan:

$$\frac{F}{N} = \mu.$$

Kroppen B:

$$\downarrow \qquad mg - S = ma_{\mathrm{B}}.$$

Kinematiskt samband:

$$a_{\mathrm{A}} = a_{\mathrm{B}}.$$

4.

I startläget:
Kinetiska energin $T_1 = 0$ (start från vila).
Med nollnivå i höjd med cirkelringens medelpunkt är potentiella energin $V_1 = mgR\sin 30^\circ = \frac{1}{2}mgR$.
I läget P:
Om den sökta farten betecknas v, är den kinetiska energin $T_2 = \frac{1}{2}mv^2$.
Potentiella energin $V_2 = -mgR$.
Kroppen påverkas endast av tyngdkraften och en normalkraft från cirkelringen. Av dessa är det bara tyngdkraften som uträttar arbete. Eftersom denna är konservativ, bevaras energin, vilket ger

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2,$$

d v s

$$\frac{1}{2}mgR = \frac{1}{2}mv^2 - mgR.$$

5.

Steiners sats ger

$$I_{\mathrm{AB}} = \bar{I}_{\mathrm{AB}} + 3mR^2. \tag{2}$$

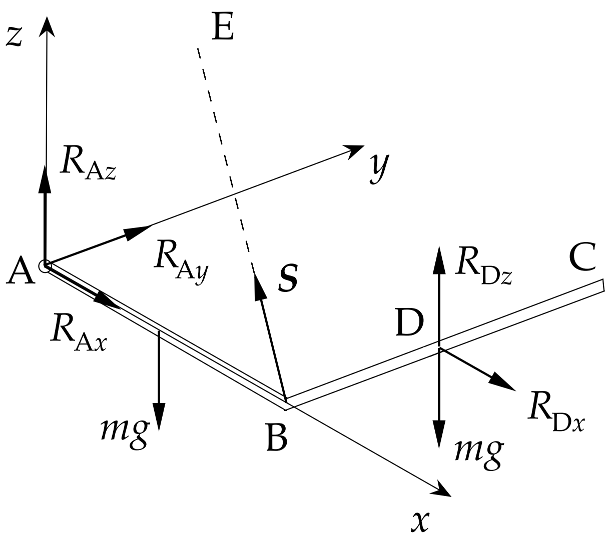
Med hjälp av formelsamling fås

$$\bar{I}_{\mathrm{AB}} = \frac{3}{10}mR^2 + \frac{1}{2}\cdot 2mR^2 = \frac{13}{10}mR^2.$$

Insättning i (2) ger

$$I_{\mathrm{AB}} = \frac{43}{10}mR^2.$$

6.



Linkraften kan skrivas som $\mathbf{S} = S\mathbf{e}_{\mathrm{BE}}$, där S är linkraftens belopp, och $\mathbf{e}_{\mathrm{BE}}$ är en enhetsvektor i kraftens riktning, d v s

$$\mathbf{e}_{\mathrm{BE}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{BE}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|} = \frac{(-2L,\, L,\, L)}{\sqrt{4L^2 + L^2 + L^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,\, 1,\, 1),$$

som ger

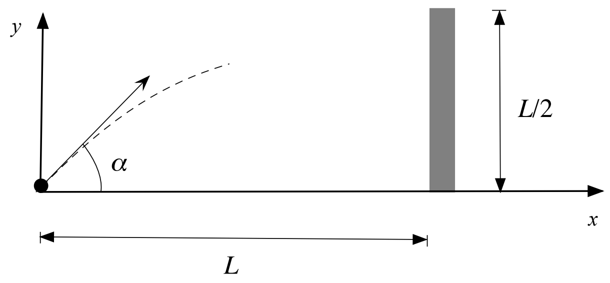
$$\boldsymbol{S} = \frac{S}{\sqrt{6}}(-2,\, 1,\, 1).$$

$$\begin{aligned}
\Sigma F_x = 0: &\qquad R_{\mathrm{A}x} + R_{\mathrm{D}x} - \frac{2}{\sqrt{6}}S = 0, \\
\Sigma F_y = 0: &\qquad R_{\mathrm{A}y} + \frac{1}{\sqrt{6}}S = 0, \\
\Sigma F_z = 0: &\qquad R_{\mathrm{A}z} + R_{\mathrm{D}z} + \frac{1}{\sqrt{6}}S - 2mg = 0, \\
\Sigma M_x = 0: &\qquad R_{\mathrm{D}z}L - mgL = 0, \\
\Sigma M_y = 0: &\qquad -R_{\mathrm{D}z} \cdot 2L - \frac{1}{\sqrt{6}}S \cdot 2L + mgL + mg \cdot 2L = 0, \\
\Sigma M_z = 0: &\qquad -R_{\mathrm{D}x}L + \frac{1}{\sqrt{6}}S \cdot 2L = 0.
\end{aligned}$$

Lösning av ekvationssystemet ger svaret:

$$S = \frac{\sqrt{6}}{2}mg, \quad R_{\mathrm{A}x} = 0, \quad R_{\mathrm{A}y} = -\frac{1}{2}mg, \quad R_{\mathrm{A}z} = \frac{1}{2}mg, \quad R_{\mathrm{D}x} = mg, \quad R_{\mathrm{D}z} = mg.$$

7.



Med val av koordinater enligt figuren gäller att

$$\ddot{x} = 0, \qquad \ddot{y} = -g.$$

Integration m a p tiden ger

$$\dot{x} = C_1, \quad \dot{y} = -gt + C_2,$$

där C_1 och C_2 är integrationskonstanter. Dessa bestäms m h a begynnelsevillkoren $\dot{x} = v_0 \cos\alpha, \dot{y} = v_0 \sin\alpha$ för $t = 0$. Här är v_0 den (än så länge) obekanta begynnelsehastigheten, och α är elevationsvinkeln, som i ena fallet är $45°$ och i andra fallet $60°$. Insättning av begynnelsevillkoren ger

$$\dot{x} = v_0 \cos\alpha, \qquad \dot{y} = -gt + v_0 \sin\alpha.$$

Ytterligare en integration ger

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t + C_3, \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha \cdot t + C_4.$$

Integrationskonstanterna C_3 och C_4 bestäms av att $x = y = 0$ för $t = 0$, vilket ger

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t, \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha \cdot t.$$

Genom att eliminera t finner man att

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} + x \tan\alpha, \tag{3}$$

som skall satisfieras av $x = L, y = L/2$, då $\alpha = 45°$. Detta bestämmer begynnelsehastigheten

$$v_0 = \sqrt{2gL}.$$

För $\alpha = 60^2$ ger (3):

$$y = -\frac{x^2}{L} + x\sqrt{3}.$$

För $x = L$ är $y = (\sqrt{3} - 1)L \approx 0,73L > 0,5L$, vilket betyder att projektilen passerar över muren med marginalen $0,23L$.

8.

Betrakta först fallrörelsen för kroppen P. Energikonservering ger:

$$\frac{m}{10} g \cdot 2L = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{10} v^2,$$

där $v = 2\sqrt{gL}$ är P:s fart omedelbart innan den träffar den T-formade kroppen. Under kollisionsförloppet bevaras rörelsemängdsmomentet med avseende på axeln A för det hela systemet, eftersom yttre krafternas impulsmoment är praktiskt taget noll. Då fås

$$\frac{m}{10} v \frac{L}{2} = I_{\mathrm{A}} \omega. \tag{4}$$

Här är I_{A} den sammansatta kroppens tröghetsmoment med avseende på A, och ω är den sökta vinkelhastigheten. Tröghetsmomentet med avseende på A fås med hjälp av formelsamling och Steiners sats som

$$I_{\mathrm{A}} = \frac{1}{3} m(2L)^2 + \frac{1}{12} m(2L)^2 + m(2L)^2 + \frac{m}{10}\left((2L)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2\right) = \frac{731}{120} mL^2.$$

Insättning i (4) ger till sist svaret

$$\omega = \frac{12}{731}\sqrt{\frac{g}{L}}.$$