Mekanik Z 061219, lösningsförslag

1.

a) Krafterna kan skrivas som

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_1 &= (0,\, 0,\, P), \\
\boldsymbol{F}_2 &= (0,\, -P,\, 0), \\
\boldsymbol{F}_3 &= (-P/\sqrt{2},\, 0,\, P/\sqrt{2}).
\end{aligned}
$$

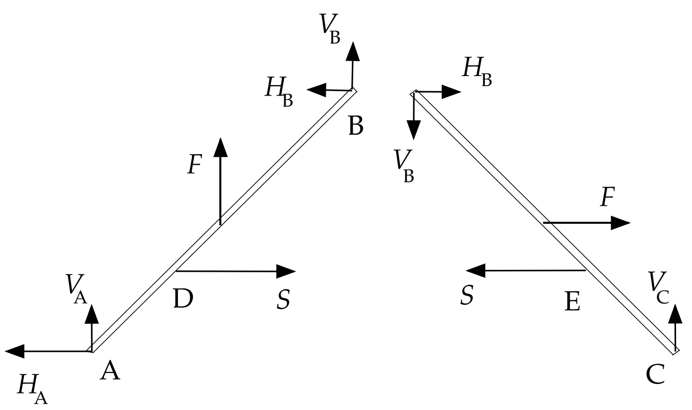
Kraftsumman $\Sigma\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3$.
Komponenterna blir då

$$
\begin{aligned}
\Sigma F_x &= -P/\sqrt{2}, \\
\Sigma F_y &= -P, \\
\Sigma F_z &= P + P/\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

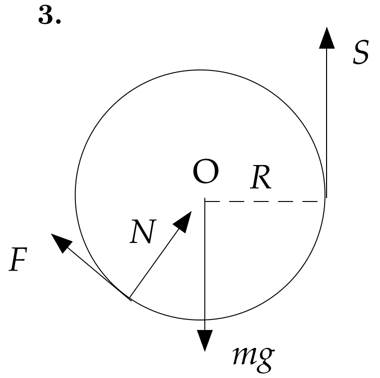
b) Endast $\boldsymbol{F}_2$ och x-komponenten av $\boldsymbol{F}_3$ bidrar till momentsumman med avseende på z-axeln:

$$
\Sigma M_z = -PL + \frac{P}{\sqrt{2}}L = -\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}PL.
$$

2.

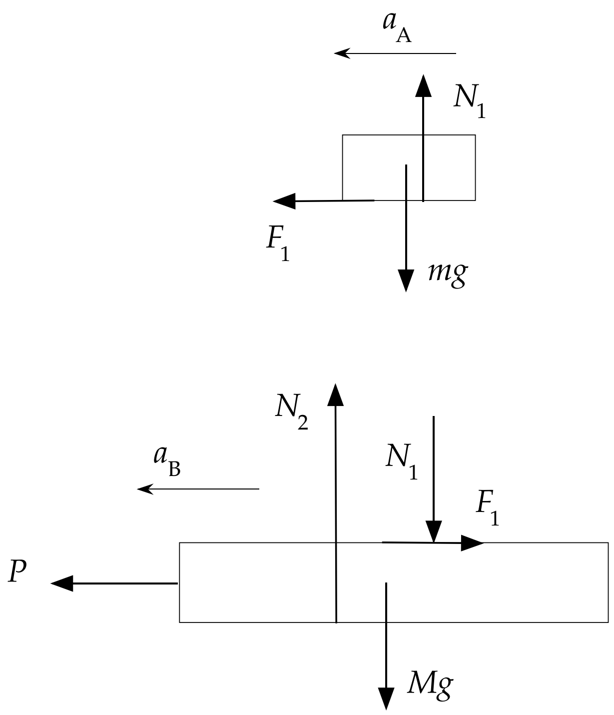


3.



$$\begin{array}{ll}
\nearrow & N - mg\cos\alpha + S\cos\alpha = 0, \\
\nwarrow & F - mg\sin\alpha + S\sin\alpha = 0. \\
\overset{\curvearrowleft}{\mathrm{O}} & SR - FR = 0.
\end{array}$$

4.



Kroppen A:

$$\begin{array}{ll}
\leftarrow & F_1 = ma_{\mathrm{A}}, \\
\uparrow & N_1 - mg = 0.
\end{array}$$

Glidning i kontaktytan:

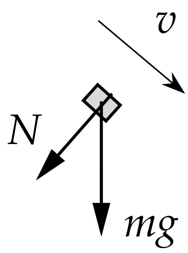
$$\frac{F_1}{N_1} = \mu.$$

Kroppen B:

$$\begin{array}{ll}
\leftarrow & P - F_1 = Ma_{\mathrm{B}}, \\
\uparrow & N_2 - N_1 - Mg = 0.
\end{array}$$

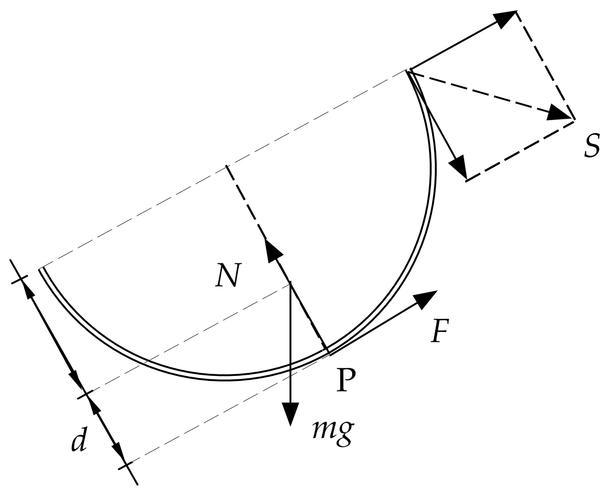
Den sista ekvationen är överflödig i detta sammanhang.

5.



$$\begin{array}{ll}
\swarrow & N + mg\cos\varphi = ma_{\mathrm{n}} = m\dfrac{v^2}{R}, \\
\searrow & mg\sin\varphi = ma_s = m\dot{v}.
\end{array}$$

6.



$$\nwarrow \qquad N - mg\cos\alpha - \frac{S}{\sqrt{2}} = 0,$$

$$\nearrow \qquad F - mg\sin\alpha + \frac{S}{\sqrt{2}} = 0.$$

$$\overset{\curvearrowleft}{\mathrm{P}} \qquad mg\sin\alpha \cdot d - \frac{S}{\sqrt{2}}R - \frac{S}{\sqrt{2}}R = 0.$$

Med hjälp av formelsamling fås

$$d = R - \frac{2R}{\pi}.$$

Lösning av ekvationssystemet ger

$$\begin{aligned} F &= \frac{\pi+2}{2\pi} mg\sin\alpha, \\ N &= mg\cos\alpha + \frac{\pi-2}{2\pi} mg\sin\alpha. \end{aligned}$$

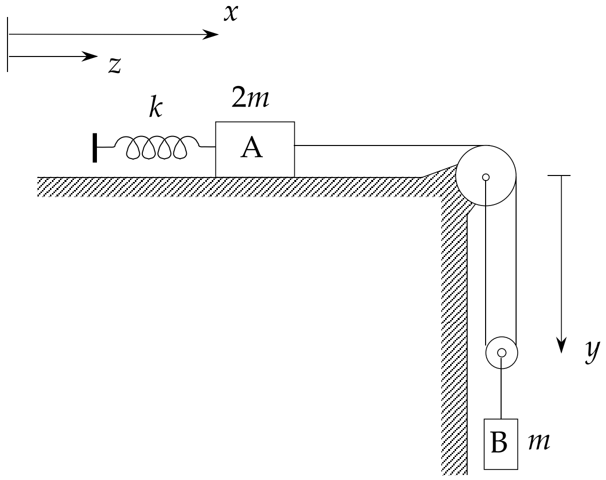
För att jämvikt skall vara möjlig krävs att friktionskoefficienten

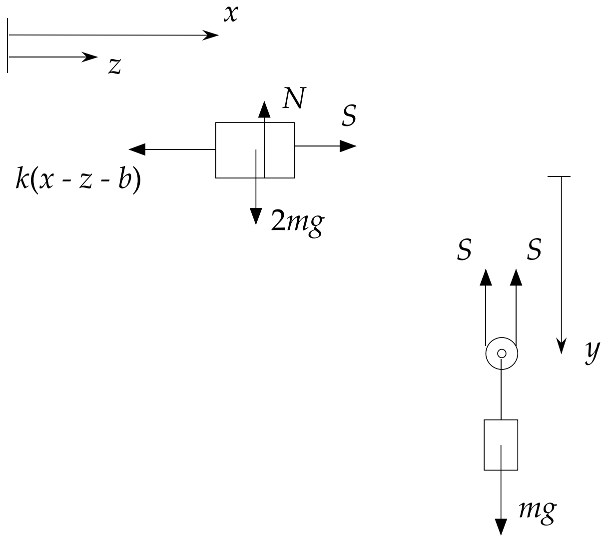
$$\mu > \frac{F}{N},$$

vilket ger svaret

$$\mu > \frac{(\pi+2)\sin\alpha}{2\pi\cos\alpha + (\pi-2)\sin\alpha}.$$

7.





Med val av koordinater enligt figuren gäller att

$$2y - x = \text{konstant},$$

eftersom linans längd är konstant, det vill säga att

$$\ddot{x} = 2\ddot{y}. \tag{1}$$

Vidare kan z uttryckas som

$$z = C \sin \Omega t, \tag{2}$$

enligt givna förutsättningar.

Kroppen A:

$$\rightarrow \quad S - k(x - z - b) = 2m\ddot{x},$$

där b är fjäderns ospända längd.

Kroppen B:

$$\downarrow \quad mg - 2S = m\ddot{y}.$$

Genom att eliminera S och utnyttja sambanden (1) och (2) finner man att

$$\ddot{x} + \frac{4k}{9m}x = \frac{4k}{9m}C \sin \Omega t + \frac{4k}{9m}b + \frac{4}{9}g.$$

Insättning av ansatsen

$$x = A \sin \Omega t + B$$

och identifiering av koefficienterna för sinustermerna ger sambandet

$$-\Omega^2 A + \frac{4k}{9m}A = \frac{4k}{9m}C.$$

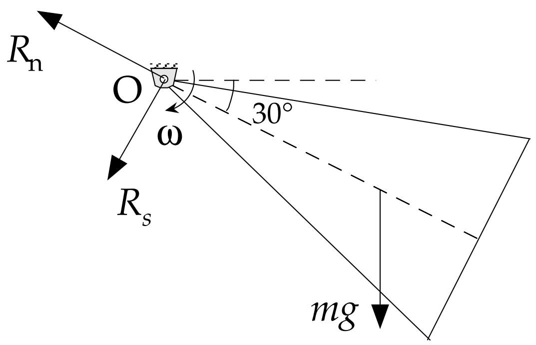
Insättning av det givna uttrycket

$$\Omega = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

ger till sist svaret

$$A = \frac{4}{3}C.$$

8.



Lagen för tyngdpunktens rörelse ger:

$$\nwarrow \quad R_\text{n} - mg\sin 30^\circ = m\overline{a}_\text{n} = m\overline{r}\omega^2,$$

$$\swarrow \quad R_s + mg\cos 30^\circ = m\overline{a}_s = m\overline{r}\dot{\omega},$$

där tyngdpunktsavståndet $\overline{r}$ fås ur formelsamling som $\overline{r} = 3h/4$. Vinkelhastigheten ω bestäms enklast med hjälp av energikonservering. Med nollnivån på O:s nivå fås:

$$\frac{1}{2}I_\text{O}\omega^2 - mg\frac{3h}{4}\sin 30^\circ = 0.$$

Vinkelaccelerationen $\dot{\omega}$ fås ur lagen för rörelsemängdsmomentet med avseende på axeln O:

$$\overset{\frown}{\text{O}} \quad mg\frac{3h}{4}\cos 30^\circ = I_\text{O}\dot{\omega}.$$

Tröghetsmomentet med avseende på axeln O fås med hjälp av formelsamling och Steiners sats som

$$I_\text{O} = \frac{3}{20}mR^2 + \frac{3}{80}mh^2 + m\left(\frac{3h}{4}\right)^2 = \\ = \frac{3}{20}mR^2 + \frac{3}{5}mh^2.$$

Man finner att

$$\omega^2 = \frac{5gh}{R^2 + 4h^2},$$

och

$$\dot{\omega} = \frac{5\sqrt{3}gh}{2(R^2 + 4h^2)},$$

vilket insatt i lagen för tyngdpunktens rörelse ger

$$R_\text{n} = \frac{2R^2 + 23h^2}{4(R^2 + 4h^2)}mg,$$

$$R_s = -\frac{\sqrt{3}(4R^2 + h^2)}{8(R^2 + 4h^2)}mg.$$

Reaktionskraftens belopp fås slutligen som

$$\sqrt{R_\text{n}^2 + R_s^2} = \cdots = \frac{\sqrt{64R^4 + 392R^2h^2 + 2119h^4}}{8(R^2 + 4h^2)}mg.$$