Tentamen i
TMA982 Linjära System och Transformer
19 march 2021, kl 14:00–18:00

Examinatorer: Hana Dobsicek Trefna och Irina Pettersson

Tentamen består av två delar (Del I och Del II) på sammanlagt 50 poäng. Det krävs minst 5 poäng av 15 poäng på Del I för att resten av tentan skall rättas. För att få godkänt betyg på tentan krävs minst 20p sammalagt (inkl. Bonuspoäng). För betyg 4 och 5 krävs minst 27p respektive 34p sammanlagt (inkl. Bonuspoäng).

I lösningarna i Del I skall ni ange:
(i) svaren (endast bokstäver) på ett separat ark,
(ii) uträkningar (kladdpapper) för plagiatkontroll.

I Del II skall samtliga steg redovisas.

Ansvarig under tentamen:
Hana Dobsicek Trefna och Irina Pettersson är tillgängliga för frågor via Zoom.

Lösningsförslag kommer att publiceras på kurshemsidan.

Tillåtna hjälpmedel:
Alla hjälpmedel tillåtna. Det är dock absolut förbjudet att kommunicera muntligt eller skriftligt med andra personer än examinator och tentavakt. Det är förbjudet att använda alla former av hörlurar, hörsnäckor eller liknande anordningar.

Granskning:
Via Zoom enligt överenskommelse med läraren.

Lycka till!

Del I

Svaren på frågorna 1-8 i Del I skall prydligt sammanfattas på **ett** ark där endast uppgifts nummer och svarsalternativ skall anges, t ex $I-1:A$. Ni skall också bifoga **uträkningar** till Del I på ett eller flera ark som inte kommer påverka resultatet, men ska användas för plagiatkontroll.

Notera att flera svarsalternativ är möjliga. **Alla** skall anges för full poäng; delpoäng ges dock om inte alla har angivits. **Ett felaktigt svarsalternativ renderar automatiskt noll poäng på deluppgiften, även om de andra angivna svarsalternativen är korrekta.**

I-1 Betrakta två tidsdiskreta signaler $x_1[n] = \cos(\pi n/2)$ och $x_2[n] = \cos(7\pi n/4)$ med fundamentalfrekvenserna ω_1 och ω_2. Vilka av följande påståenden är sanna?

A. $\omega_1 > \omega_2$.

B. $\omega_1 < \omega_2$.

C. En av signalerna är inte periodisk, varför dess fundamentalfrekvens inte är definierad.

D. $x_1[n]$ är en energisignal.

E. $x_2[n]$ är en effektsignal. (2p)

I-2 Givet en insignal $x[n] = (1/5)^n$ och motsvarande utsignalen $y[n] = 3(1/5)^n$, markera påståenden som är sanna.

A. Systemet är LTI och det finns inga andra LTI-system som ger samma par av in- och utsignal.

B. Systemet kan vara LTI, men det kan inte entydigt definieras utifrån detta par av signaler.

C. Systemet kan inte vara LTI.

D. Systemet måste vara stabilt och kausalt.

(2p)

I-3 Fouriertransformen av $x(t) = e^{-3|t|}\sin(2t)$ är

A. $\dfrac{j}{3+(\omega+2)^2} + \dfrac{j}{3+(\omega-2)^2}$.

B. $\dfrac{3j}{9+(\omega+2)^2} + \dfrac{3j}{9+(\omega-2)^2}$.

C. $\dfrac{1}{9-(\omega+2)^2} + \dfrac{1}{9-(\omega-2)^2}$.

D. $\dfrac{3j}{9+(\omega+2)^2} - \dfrac{3j}{9+(\omega-2)^2}$.

(2p)

I-4 Vilka av följande överföringsfinktioner kan komma från kausala tidsdiskreta LTI-system?

A. $H(z) = \dfrac{2z^{-1}}{1-z^{-1}}, \quad |z| > 1$.

B. $H(z) = \dfrac{3}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{3}z^{-1})}, \quad \dfrac{1}{2} < |z| < \dfrac{1}{3}$.

C. $H(z) = \dfrac{3z}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{3}z^{-1})}, \quad |z| > \dfrac{1}{2}$.

D. $H(z) = \dfrac{1}{(1-2z^{-1})(1+3z^{-1})}, \quad |z| > 3$.

(2p)

I-5 Vilka av följande par av insignaler x och utsignaler y är möjliga för ett stabilt och kausalt LTI-system?

A. $x(t) = e^t u(t)$ och $y(t) = e^{2t}u(t+1)$.

B. $x(t) = \sin(2t)$ och $y(t) = 3j\cos(2t)$

C. $x(t) = \frac{u(t)}{1+2t^2}$ och $y(t) = (1+2t^2)u(t)$.

D. $x(t) = e^{j2t}$ och $y(t) = \cos(2t)$.

E. $x(t) = \delta(t)$ och $y(t) = -2\delta(t) + e^{-2t}u(t)$.

(2p)

I-6 Vi vet att en signal $x(t)$ kan kan skrivas som en summa av en jämn signal $x_e(t)$ och en udda signal $x_o(t)$. Vilken av föjande signaler representerar den jämna delsignalen till $x(t)$ (som visas i figuren nedan)?

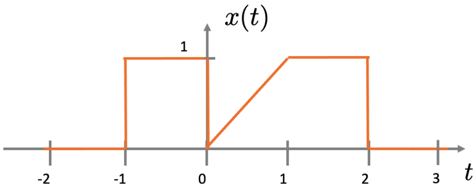
A. Signal A.

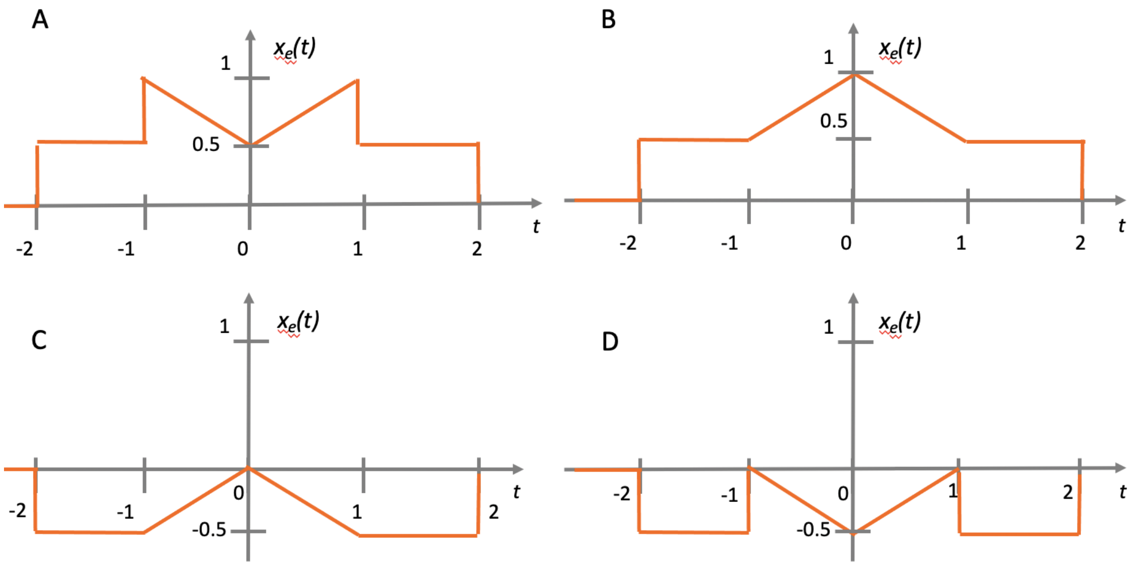
B. Signal B.

C. Signal C.

D. Signal D.

E. Ingen av A-D.





(1p)

I-7 Givet ett LTI-system. Antag att impulsvaret är stegfunktionen $h(t) = u(t)$ och insignalen är rampfunktionen $x(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$. Vilka påståenden är sanna för utsignalen $y = x * h$?

A. $y(t)$ är en stegfunktion.

B. $y(t)$ är en rampfunktion.

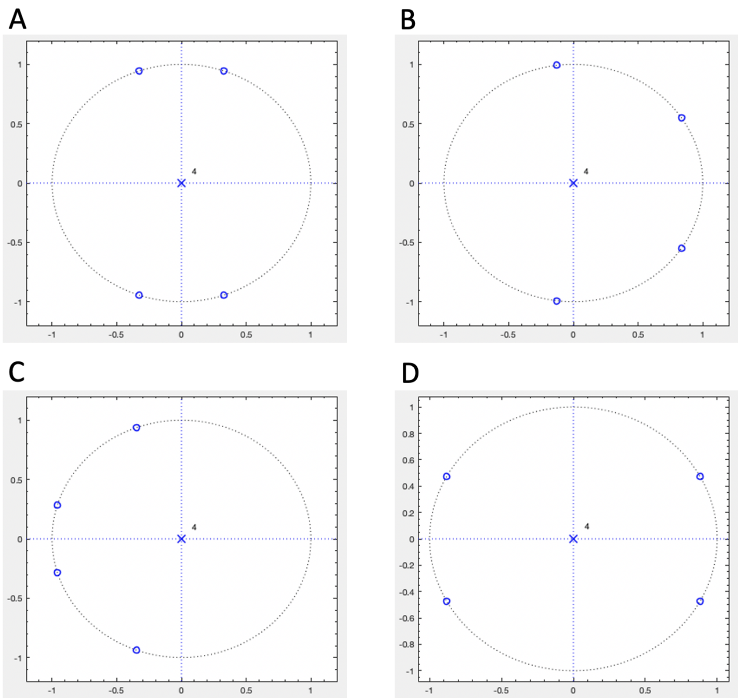
C. $y(t)$ är en rektangelpuls.

D. $y(t)$ är en triangelpuls.

E. Inget av ovanstående alternativ.

(2p)

I-8 I kursen pratade vi om fyra vanliga filter: lågpass-, högpass-, bandpass- och bandstoppfilter. I Figur 1 är några filter beskrivna med pol – och nollställe placeringar i z-planet (Figur A-D). Notera att "o" markerar nollställen medan "x" markerar poler, samt att alla filter är 4:e ordningensfilter. Ange vilken pol – och nollställe placering motsvarar vilket filter. Det krävs minst två angivna par för att få ett poäng.



Figur 1: Pol-nollställediagram i upp. I-8.

(2p)

Del II

Sammansatta frågor (35 poäng) Börja varje uppgift på en ny sida. Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa. Använd ej baksidor för att minska risken att missa scanna/fotografera den.

II-1 Betrakta ett LTI-system med stegsvaret

$$s(t) = (e^{-3t} - 2e^{-2t} + 1)u(t).$$

(a) Bestäm impulssvaret. (2p)

(b) Vad blir utsignalen om insignalen är $x(t) = e^t u(t)$? (2p)

II-2 (a) Är systemet $y[n] = x[n^2 - 1]$ linjärt/tidsinvariant/stabilt/kausalt? Motivera för varje svar (bevisa eller ge ett motexempel). (4p)

II-3 (a) Bestäm en 2π-periodisk lösning till ekvationen $y'(t) + 2y(t - \pi) = \sin t$. Hint: Använd Fourierserier. (4p)

(b) Bestäm effekten (medelenergin) för signalen $y(t)$ i (a). (2p)

II-4 Låt $q(t) = te^{-\alpha t}u(t)$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Betrakta ett kausalt LTI-system $y = x * h$ sådant att

$$y(t) = (q * x)(t) - (q * y)(t).$$

(a) Bestäm systemfunktionen $H(s)$. (2p)

(b) För vilka α är systemet stabilt? Motivera. (2p)

(c) Bestäm impulssvaret $h(t)$. (2p)

II-5 Ett så kallad Notchfilter med samplingsfrekvensen 18 kHz har överföringsfunktion

$$H(z) = \frac{z^2 + z + 1}{z^2 + 0.8z + 0.64}$$

(a) Vilken frekvens släcks ut av filtret? Antag att vi arbetar med reella insignaler. (2p)

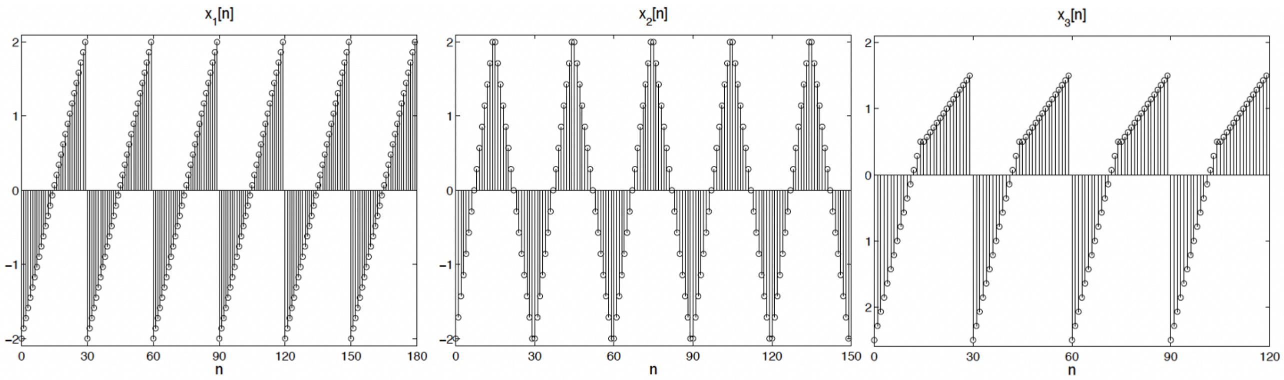
(b) Bestäm en differensekvation som beskriver filtret. (2p)

(c) Om vi skulle designa ett analogt Notchfilter som släcker ut samma frekvens, hur skulle ett pol-nollställediagram se ut? En tydlig motivering krävs. (2p)

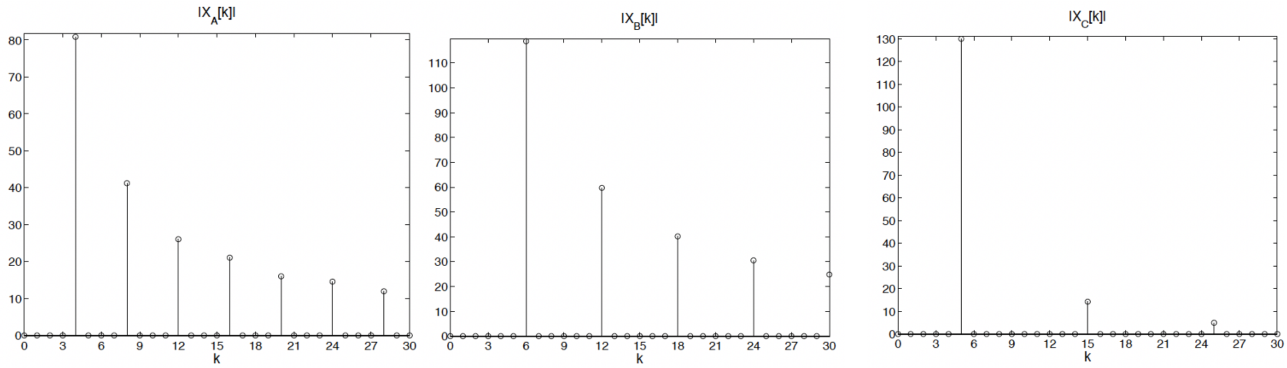
II-6 (a) Man vet att DFT kan användas för att analysera frekvensinnehållet hos en mängd olika typer av signaler. I den här uppgiften var DFT:n av tre olika, periodiska tidsdiskreta signaler beräknat. De tidsdiskreta signalerna visas i figur a) medan beloppet av deras transformer visas i figur b). Om figur b) hade visat de fullständiga transformerna hade vi enkelt kunnat se vilken transform som motsvarar vilken tidssignal eftersom de har olika längd, 180, 150 respektive 120. Tyvärr, har vi bara de 30 första punkterna till hand vilket skapar en del osäkerhet om vilken signal som motsvarar vilken transform. Din uppgift är att para ihop signalerna $x_1[n]$, $x_2[n]$ och $x_3[n]$ med deras respektive transformer $X_A[k]$, $X_B[k]$ eller $X_C[k]$. En tydlig motivering krävs. (5p)

(b) En tidskontinuerlig signal $x(t) = 4\cos(300t)$ blev samplad och dess 64-punkters DFT vars absolutbelopp visas i figur 2 är beräknad. Bestäm den diskreta signalens frekvens Ω_0. (3p)

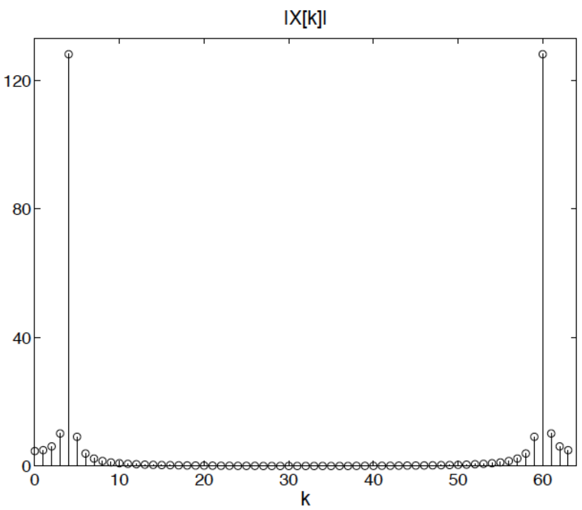
(c) Bestäm samplingsfrekvensen F_s Hz som används för att sampla signalen i uppgift II-7b. Antag att ingen vikning uppstått. (1p)



a) En illustration av de periodiska signaler som var genererat i uppgift II-6a.



b) De första 30 DFT-punkterna av de tre DFT:er som var beräknat i uppgift II-6a.



Figur 2: Absolutbeloppet av DFTn i uppgift II-6 (b).

Facit Del I

1: A, E
2: B
3: D
4: A, D
5: B, E
6: A
7: E
8: A–bandstop, B–högpass, C–lågpass, D–bandpass.

I-1 Fundamentalperioderna till $x_1[n] = \cos(\pi n/2)$ och $x_2[n] = \cos(7\pi n/4)$ är

$$T_1 = \frac{2\pi}{\pi/2} m = 4 \text{ s}, \quad T_2 = \frac{2\pi}{7\pi n/4} m = 8 \text{ s}.$$

Detta innebär att fundamentalfrekvenserna är

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s}, \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} = \frac{\pi}{4} \text{ rad/s},$$

och $\omega_1 > \omega_2$.

Signalerna är periodiska, varför de inte kan vara enrgisignaler. $x_2[n]$ är en effektsignal eftersom

$$\frac{1}{T_2} \sum_{\langle T_2 \rangle} |x_2[n]|^2 < \infty.$$

(2p)

I-2 Givet en insignal $x[n] = (1/5)^n$ och motsvarande utsignalen $y[n] = 3(1/5)^n$, vet vi bara att $H(1/5) = 3$. Denna information är inte tillräklig för att beskriva ett LTI-system, men ett exempel av ett LTI-system som ger detta par av signaler är $y[n] = 3x[n]$ (stabilt och kausalt). Ett annat exempel är ett system med överföringsfunktionen $H(z) = -\frac{3/2}{(1-\frac{1}{10}z^{-1})(1-\frac{2}{5}z^{-1})}$, $ROC = \{\frac{1}{10} < \Re(s) < \frac{2}{5}\}$ (varken stabilt eller kausalt). Alltså kan systemet vara LTI, men det kan inte entydigt definieras utifrån detta par av signaler. Systemet behöver inte vara stabilt och kausalt. (2p)

I-3 Vi kan räkna ut Fouriertransformen av $x(t) = e^{-3|t|}\sin(2t)$ enligt definitionen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3|t|}\sin(2t)e^{-j\omega t}\,dt =$$
$$\frac{1}{2j}\int_{-\infty}^{0}(e^{(3+j(2-\omega))t} - e^{(3-j(2+\omega))t})dt$$
$$+\frac{1}{2j}\int_{0}^{+\infty}(e^{(-3+j(2-\omega))t} - e^{(-3-j(2+\omega))t})dt$$
$$= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{3-j(\omega-2)} - \frac{1}{3-j(\omega+2)}\right) + \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{3+j(\omega-2)} - \frac{1}{3+j(\omega+2)}\right)$$
$$= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{3-j(\omega-2)} + \frac{1}{3+j(\omega-2)}\right) - \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{3-j(\omega+2)} + \frac{1}{3+j(\omega+2)}\right)$$
$$= \frac{1}{2j}\times\frac{6}{9+(\omega-2)^2} - \frac{1}{2j}\times\frac{6}{9+(\omega+2)^2}$$
$$= \frac{3j}{9+(\omega+2)^2} - \frac{3j}{9+(\omega-2)^2}.$$

I-4 Ett LTI-system är kausalt om och endast om ROC till överföringsfunktionen ligger utanför en cirkel (med radien som bestäms av polen med störst belopp) och ROC inkluderar ∞. I fall $H(z)$ är en rationell funktion $H(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, så måste grad$P(z) \leq$ grad$Q(z)$.

A. $H(z) = \dfrac{2z^{-1}}{1-z^{-1}}, \quad |z| > 1.$
Ja: $|z| > 1$ och grad$P(z) \leq$ grad$Q(z)$.

B. $H(z) = \dfrac{3}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{3}z^{-1})}, \quad \dfrac{1}{2} < |z| < \dfrac{1}{3}.$
Nej: ROC är inte utanför en cirkel.

C. $H(z) = \dfrac{3z}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{3}z^{-1})}, \quad |z| > \dfrac{1}{2}.$
Nej: grad$P(z) >$ grad$Q(z)$.

D. $H(z) = \dfrac{1}{(1-2z^{-1})(1+3z^{-1})}, \quad |z| > 3.$
Ja: $|z| > 3$ och grad$P(z) \leq$ grad$Q(z)$.

(2p)

I-5 Vilka av följande par av insignaler x och utsignaler y är möjliga för ett stabilt och kausalt LTI-system?

A. $x(t) = e^t u(t)$ och $y(t) = e^{2t} u(t+1)$.
Inte möjligt eftersom i ett kausalt system skulle y vara högersidig. I detta fall $y(-1) \neq 0$.

B. $x(t) = \sin(2t)$ och $y(t) = 3j\cos(2t)$.
Möjligt.

C. $x(t) = \frac{u(t)}{1+2t^2}$ och $y(t) = (1+2t^2)u(t)$.
Inte möjligt eftersom en begränsad insignal i ett stabilt system måste ge en begränsad utsignal, som inte är sant i detta fall.

D. $x(t) = e^{j2t}$ och $y(t) = \cos(2t)$.
Inte möjligt eftersom nya frekvenser kan inte dyka upp. Om $x(t) = e^{j2t}$, så måste vi få $y(t) = H(j2)e^{j2t}$, men i detta fall har vi $\cos(2t) = (e^{j2t} + e^{-j2t})/2$.

E. $x(t) = \delta(t)$ och $y(t) = -2\delta(t) + e^{-2t}u(t)$.
Möjligt.

(2p)

I-6 Den jämna delsignalen är $x_e(t) = (x(t)+x(-t))/2$. Rita $x(t)$, $x(-t)$, adddera och dividera med 2. Svaret är A. (1p)

I-7 Låt oss räkna ut faltningen $y = x * h$:

$$y(t) = \int_0^\infty x(\tau)u(t-\tau)\,d\tau = \begin{cases} \int_0^t \tau d\tau = t^2/2, & t > 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Detta innebär att $y(t) = \frac{t^2}{2}u(t)$ och rätt svarsalyternativ är E. (2p)

I-8 Baserat på nollställeplaceringen, kan vi se att A är bandstopp-, B är högpass-, C är lågpass-, D är bandpassfilter.

Facit Del II

II-1 (a) Eftersom $u'(t) = \delta(t)$ (i svag mening), så är derivatan av stegsvaret är impulssvaret i ett LTI-system

$$h(t) = s'(t) = (-3e^{-3t} + 4e^{-2t})u(t) + (e^{-3t} - 2e^{-2t} + 1)\delta(t),$$

$$\boxed{h(t) = (-3e^{-3t} + 4e^{-2t})u(t)}.$$

(2p)

(b) För att bestämma utsignalen för $x(t) = e^t u(t)$, kan man använda Laplacetransform:

$$X(s) = \frac{1}{s-1}, \quad \Re(s) > 1,$$
$$H(s) = -\frac{3}{s+3} + \frac{4}{s+2}, \quad \Re(s) > -2,$$
$$Y(s) = X(s)H(s) = -\frac{3}{(s+3)(s-1)} + \frac{4}{(s+2)(s-1)}, \quad \Re(s) > 1.$$

Partialbråksuppdelningen ger

$$Y(s) = \frac{7/12}{s-1} - \frac{4/3}{s+2} + \frac{3/4}{s+3}, \quad \Re(s) > 1.$$

Invers Laplacetransformen ger utsignalen

$$\boxed{y(t) = \big(\frac{7}{12}e^t - \frac{4}{3}e^{-2t} + \frac{3}{4}e^{-3t}\big)u(t)}.$$

(2p)

II-2 (a) **Linjaritet:** Systemet är linjärt. Låt oss ta två insignaler $x_1[n], x_2[n]$ och respektiva utsignaler $y_1[n], y_2[n]$. Låt $x[n] = c_1x_1[n]+c_2x_2[n]$. Utsignalen blir

$$y[n] = x[n^2 - 1] = c_1x_1[n^2 - 1] + c_2x_2[n^2 - 1] = c_1y_1[n] + c_2y_2[n].$$

Tidsinvarians: Systemet är inte tidsinvariant. Låt $y[n]$ vara utsignalen för $x[n]$. Låt $x_1[n] = x[n - n_0]$.

$$y_1[n] = x_1[n^2 - 1] = x[n^2 - 1 - n_0].$$

Den förskjutna utsignalen $y[n-n_0] = x[(n-n_0)^2-1] \neq x[n^2-1-n_0]$. Ett motexempel är $x[n] = \delta[n]$ med $n_0 = -1$. I detta fall får vi $\delta[(n+1)^2-1] \neq \delta[n^2]$.

Stabilitet: Systemet är stabilt. Antag att $|x[n]| \leq M$ för alla n. Då är utsignalen också begränsad $|y[n]| \leq M$.

Kausalitet: Systemet är inte kausalt. Vi tar $n=-1$ och får $y[-1] = x[0]$, dvs utsignalen beror på framtiden. (4p)

II-3 (a) Eftersom lösningen ska vara 2π-periodisk, så är fundamentalfrekvensen $\omega_0 = 1$ och $y(t)$ kan skrivas som en serie

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{jnt}. \tag{1}$$

Vi sätter in (1) i ekvationen och får

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (jna_n e^{jnt} + 2a_n e^{jn(t-\pi)}) = \frac{e^{jt}}{2j} - \frac{e^{-jt}}{2j},$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (jn + 2e^{-jn\pi})a_n e^{jnt} = \frac{e^{jt}}{2j} - \frac{e^{-jt}}{2j}.$$

Vi ser att endast två koefficienter a_1 och a_{-1} är nollskillda och de uppfyller följande ekvationer:

$$(j-2)a_1 = \frac{1}{2j}, \quad (-j-2)a_{-1} = -\frac{1}{2j}.$$

Fourierkoefficienterna till $y(t)$ är

$$a_1 = \frac{-1+2j}{10}, \quad a_{-1} = \frac{-1-2j}{10}, \quad a_n = 0 \text{ då } n \neq \pm 1.$$

Vi sätter in Fourierkoefficienterna i (1) och får

$$y(t) = a_1 e^{jt} + a_{-1}e^{-jt} = \frac{1}{10}(e^{jt} + e^{-jt}) + \frac{2j}{10}(e^{jt} - e^{-jt}),$$

$$\boxed{y(t) = -\frac{1}{5}\cos t - \frac{2}{5}\sin t}.$$

(4p)

(b) Effekten för en 2π-periodisk signal $y(t)$ är

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |y(t)|^2\,dt.$$

Enligt Parsevals sats får vi

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 = |a_1|^2 + |a_{-1}|^2 = \Big(\frac{\sqrt{5}}{10}\Big)^2 + \Big(\frac{\sqrt{5}}{10}\Big)^2 = \frac{1}{10}.$$

(2p)

II-4 (a) Först räknar vi ut Laplacetransformen av $q(t) = te^{-\alpha t}u(t)$:

$$Q(s) = \frac{1}{(s+\alpha)^2}, \quad \Re(s) > -\alpha.$$

Eftersom $y(t) = (q * x)(t) - (q * y)(t)$, så ger Laplacetransformen

$$\begin{aligned}
&Y(s) = Q(s)X(s) - Q(s)Y(s),\\
&Y(s)(1 + Q(s)) = Q(s)X(s),\\
&H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Q(s}{1 + Q(s)} = \frac{1}{(s+\alpha)^2 + 1}, \quad \Re(s) > -\alpha.
\end{aligned}$$

(2p)

(b) Systemfunktionen $H(s)$ är rationell och har två poler $p_{1,2} = -\alpha \pm j$. Ett kausalt LTI-system är stabilt om och endast om $\Re(p_{1,2}) < 0$, dvs om $\alpha > 0$. (2p)

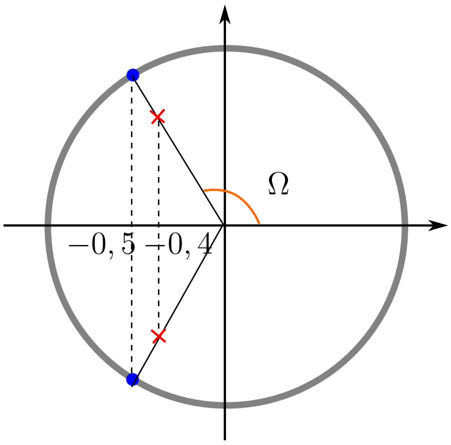
(c) Invers Laplacetransformen ger impulssvaret $h(t)$:

$$\boxed{h(t) = e^{-\alpha t}\sin t\, u(t)}.$$

(2p)

II-5 (a) Nollställen:

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -0.5 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}j = -0.5e^{\pm j\frac{2\pi}{3}}$$



Figur 3: Pol-nollställediagram i uppgift II-4

Poler:

$$p_{1,2} = \frac{-0.8 \pm \sqrt{0.64 - 4 * 0.64}2}{=} - 0.4 \pm 0.4\sqrt{3}j$$

Från pol-nollställe diagramet kan vi avläsa att $\Omega = 2\pi/3$.

$$\begin{aligned} \Omega &= 2\pi \frac{f}{f_s} = 2\pi \frac{f}{18 \cdot 10^3} \\ \frac{2\pi}{3} &= 2\pi \frac{f}{18 \cdot 10^3} \\ f &= \frac{18 \cdot 10^3}{3} = 6 \cdot 10^3 \text{ Hz.} \end{aligned}$$

(b) Eftersom

$$H(z) = \frac{z^2 + z + 1}{z^2 + 0.8z + 0.64} = \frac{Y(z)}{X(z)},$$

och $x[n+k]$ transformeras till $z^k X(z)$ (dubbelsidig $\mathcal{Z}$-transform), så får vi följande differentekvation

$$y[n+2] + 0.8y[n+1] + 0.64y[n] = x[n+2] + x[n+1] + x[n].$$

(c) I analoga filter följer vi samma princip för notch-filter fast i s-planet. Nollställe ligger på den imaginära (frekvens) axeln med värde på frekvensen som vi vill filtrera bort. Poler ligger vid samma frekvenser, men vi introducerar en real del σ, dess värde bestämmer bandbredden av filter. Vi bestämmer inte värdet av σ i denna uppgift, vi vet bara att det ska vara relativt litet. En överföringsfunktion blir

$$H(s) = \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + \omega_c s + \omega_0^2}$$

där $\omega_0 = 6$ kHz är frekvensen som släckts ut och ω_c är bandbredden.

II-6 (a) Till att börja med gör vi två viktiga observationer:

i. samtliga signaler är periodiska med perioden 30 och
ii. signalerna har olika längd och därmed har deras respektive DFT:er också olika längd.

Eftersom signalerna har samma periodtid har de samma grundton, men på grund av att DFT:erna har olika längd kommer frekvensinnehållet samplas annorlunda. I slutändan är det denna insikt som vi kommer utnyttja för att svara på uppgiften. Grundtonen hos en diskret signal som har periodtiden 30 är

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{30} \text{ rad/sampel.}$$

Samtliga diskreta signaler kan skrivas på formen

$$x_1[n] = \sum_{k=<30>} a_k e^{jk\omega_0 n};$$
$$x_2[n] = \sum_{k=<30>} b_k e^{jk\omega_0 n};$$
$$x_3[n] = \sum_{k=<30>} c_k e^{jk\omega_0 n}.$$

Att beräkna a_k, b_k och c_k från figuren verkar omständligt, men som tur är behöver vi inte göra detta för att kunna lösa uppgiften. Om en diskret signal har en stark komponent med frekvensen ω_0 innebär detta att dess DFT kommer anta ett stort värde då

$$k \approx \frac{\omega_0 N}{2\pi},$$

där N är längden på vår DFT. Signalernas grundtoner ger därför upphov till toppar vid

$$k = \frac{N}{30}$$

Eftersom N här bestäms av signalens längd får vi att grundtonen ligger på k = 6 för $x_1[n]$, k = 5 för $x_2[n]$ och k = 4 för $x_3[n]$. En jämförelse med de tre DFT:erna ger att $|X_A[k|$ motsvarar $x_3[n]$, $|X_B[k]|$ motsvarar $x_1[n]$ och $[X_C[k]|$ motsvarar $x_2[n]$ eftersom de har sina första toppar vid just k = 4, k = 6 respektive k = 5.

(b) Vi ser att DFT:n har spikar vid k = 4 och k = 60. För att beräkna den diskreta frekvensen använder vi den lägre av dessa,

$$\Omega_0 = k_0 \frac{2\pi}{N} = \frac{8\pi}{64} \approx 0.4 \text{ rad/sampel.}$$

(c) Från relationen $x[n] = 4\cos(300nT) = 4\cos(\Omega_0 n)$ inser vi att $\Omega_0 = 300T$ och därmed får vi att

$$F_s = \frac{1}{T} = \frac{300}{\Omega_0} \approx 760 \text{ Hz.}$$

Vi vill notera att det värde som användes för att generera signalen i uppgiften var $F_s = 750Hz$. Om vi hade nollutökat signalen hade vi samplat av DTFT:n tätare vilket hade lett till bättre uppskattning av den diskreta frekvensen vilket i sin tur hade kunnat förbättra vår uppskattning av samplingsfrekvensen ($F_s \approx 760Hz$).