Tentamen
TMA044 Flervariabelanalys - Tentamen E2/DI3 (med lösningar)

2020-10-28 kl. 14.00–18.00

Examinator: Daniel Persson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: , telefon: anknytning 3174

Hjälpmedel: alla utom mänsklig kontakt

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För att få slutbetyg på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se sidan 4

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3-8 se sidan 5

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

9. Låt $\mathbf{F}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}$. Låt $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ vara en glatt, moturs orienterad sluten kurva som är rand till en domän $D \subset \mathbb{R}^2$.

(a) Visa att följande gäller: (5p)

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \begin{cases} 0 & \text{om } (0,0) \notin D \\ 2\pi & \text{om } (0,0) \in D \end{cases}$$

(b) Förklara varför Stokes sats fallerar för $\mathbf{F}$ på D om D innehåller origo. (1p)

Lösning: Se Föreläsning 21.3.

10. Låt S vara ytan som definieras av ekvationen (6p)

$$x^2 + y^2 + 2z^2 - 4z = 4, \qquad z \geq 0,$$

med utåtgående enhetsnormal $\hat{\mathbf{N}}$. Låt vektorfältet $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara definerat av

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xz - y^3 \cos z)\mathbf{i} + x^3 e^z \mathbf{j} + xyze^{x^2+y^2+z^2}\mathbf{k}.$$

Använd Stokes sats för att beräkna integralen

$$I = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS.$$

Lösning: Stokes sats säger

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Randen ∂S till ytan S ges av cirkeln i planet $z = 0$:

$$\mathcal{C} = \partial S : \qquad x^2 + y^2 = 4.$$

Eftersom normalen $\hat{\mathbf{N}}$ är utåtriktad, dvs har positiv $\mathbf{k}$-komponent, är kurvan $\mathcal{C}$ moturs orienterad. Notera nu att kurvan $\mathcal{C}$ även är rand till disken $D = \{x^2 + y^2 \leq 4, z = 0\}$. Vi kan därför utnyttja att enligt Greens formel så kan arbetsintegralen längs $\mathcal{C}$ även skrivas som en dubbelintegral över D, med normal $\mathbf{k}$ upp ur D. Alltså om vi först använder Stokes för att konvertera ytintegralen till en arbetsintegral så kan vi sen anända Greens för att i sin tur konvertera denna till en dubbelintegral:

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS \underbrace{=}_{Stokes} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \underbrace{=}_{Green's} \iint_D \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} dA.$$

Detta gör att vi behöver nu endast beräkna $\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}$ på disken D där $z = 0$. Vi får:

$$\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}\Big|_{z=0} = \cdots = 3(x^2 + y^2).$$

Vi beräknar nu den slutgiltiga integralen

$$I = 3 \iint_D (x^2 + y^2) dA = 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3 dr = 24\pi.$$

11. Betrakta funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^4+(x^2+y^3)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Visa att $f(x,y) \to 0$ då $(x,y) \to (0,0)$ längs varje rät linje genom origo. (2p)

(b) Bestäm om $f(x,y)$ är kontinuerlig i origo. (2p)

(c) Avgör om de partiella derivatorna $\frac{\partial f}{\partial x}$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$ existerar i origo. (2p)

Lösning (a): Längs y-axeln har vi uppenbarligen $f(0,y) =$. För alla andra linjer kan vi skriva $y = kx$, vilket ger

$$f(x,kx) = \frac{k^3x^5}{x^4 + x^4(1+k^3x)^2} = \frac{k^3x}{1+(1+k^3x)^2} \to 0 \quad \text{då} \quad x \to 0.$$

Lösning (b): En funktion $f(x,y)$ är kontinuerlig i (a,b) om

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

I vårt fall betyder det att vi måste ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0.$$

Låt oss testa detta. Vi noterar att om vi närmar oss origo längs kurvan $y^3 = -x^2$ (dvs. $y = -x^{2/3}$) får vi

$$f(x, -x^{2/3}) = -\frac{x^4}{x^4} = -1 \neq 0.$$

Alltså är f ej kontinuerlig i origo.

Lösning (c): Vi testar om de partiella derivatorna existerar:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} := \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0;$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} := \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{h} = \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = 0.$$

De partiella derivatorna existerar alltså i origo trots att f ej är kontinuerlig och vi har $f_1(0,0) = f_2(0,0) = 0$.

Formelblad för TMA044

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ , \ 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \frac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.

Anonym kod	**TMA044 Flervariabelanalys - Tentamen E2/DI3 (med lösningar) 202**

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall svar anges på separat skrivpapper.

(a) i) Låt ytan S vara bestämd av $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$. Vilken av följande ger en *utåtgående* normal till S?

A. $(2x, 2y, 2z)$.

B. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)$

C. $\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)$

D. $\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right)$

(0.5p)

Svar: B

ii) Randen till halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0$, ges av

A. disken $x^2 + y^2 \leq 4$ i xy-planet

B. skärningen mellan planet $z = 0$ och bollen $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$

C. den har ingen rand

D. skärningen mellan planet $z = 0$ och sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

(0.5p)

Svar: D

iii) **Påstående:** Om $f(x, y)$ är differentierbar (a, b) så är $f(x, y)$ kontinuerlig i (a, b).

Ange vilket alternativ nedan som stämmer.

A Sant

B Falskt

(0.5p)

Svar: A

(b) Låt S vara ytan som definieras av $z^2 = xy + 1$.

i. Bestäm ekvationen för tangentplanet till S i punkten $(x, y, z) = (1, 1, \sqrt{2})$. (1.5p)

ii. Ange en enhetsnormal $\hat{\mathbf{n}}(x, y, z)$ till S. (1p)

Lösning: (i) Vi börjar med att notera att S är en nivåyta på formen $G(x, y) = 0$ med $G(x, y) = z^2 - xy - 1$. Ekvationen för tangentplanet till en nivåyta i punkten (a, b, c) ges av

$$G_1(a, b, c)(x - a) + G_2(a, b, c)(y - b) + G_3(a, b, c)(z - c) = 0.$$

I vårt fall har vi

$$G_1(1,1,\sqrt{2}) = -1, \qquad G_2(1,1,\sqrt{2}) = -1, \qquad G_3(1,1,\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}.$$

Tangentplanets ekvation blir således

$$-(x-1) - (y-1) + 2\sqrt{2}(z-2) = 0$$

eller

$$2\sqrt{2}z - y - x = 4\sqrt{2} - 2.$$

Lösning: (ii) Normalen till en nivåyta $G = 0$ ges av gradienten

$$\mathbf{n}(x,y,z) = \nabla G(x,y,z) = (-y, -x, 2z)$$

För att få enhetsnormalen måste vi normalisera denna

$$\hat{\mathbf{n}}(x,y,z) = \frac{\nabla G(x,y,z)}{|\nabla G(x,y,z)|} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+4z^2}}(-y,-x,2z).$$

(c) i. Låt C vara den del av enhetscirkeln som ligger i den första kvadranten av $\mathbb{R}^2$. Bestäm en parametrisering av $\mathcal{C}$ med y som parameter och moturs orientering. (0.5p)

Lösning: I första kvadranten har vi att cirkeln kan beskrivas som $x = \sqrt{1-y^2}$ med $0 \leq y \leq 1$. En parametrisering med y som parameter ges därför av

$$\mathbf{r}(y) = \sqrt{1-y^2}\mathbf{i} + y\mathbf{j}, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

ii. Beräkna längden av kurvan som parametriseras av $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$. (2p)

Lösning: Formeln för kurvlängd är

$$\ell(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} ds = \int_{t_0}^{t_1} \left| \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right| dt.$$

I vårt fall har vi

$$\left| \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right| = \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2 + (2t)^2} = \sqrt{8t^2 + 9t^4} = \sqrt{t^2(8+9t^2)} = t\sqrt{8+9t^2}.$$

Kurvlängden blir således

$$\int_0^1 t\sqrt{8+9t^2}dt = \left\{ u = 8 + 9t^2, du = 18tdt, 8 \leq u \leq 17 \right\}$$

$$= \frac{1}{18}\int_8^{17} \sqrt{t}dt = \frac{1}{27}(17\sqrt{17} - 16\sqrt{2}).$$

(d) i. Beräkna $\frac{\partial^2 g(v^2,uv,-u^2)}{\partial v \partial u}$ i termer av de partiella derivatorna av g. (2p)

ii. Låt $z = txy^2$ med $x = t + \ln(y + t^2)$ och $y = e^t$. Visa att (2p)

$$\frac{dz}{dt} = xy^2 + ty^2\left(1 + \frac{y+2t}{y+t^2}\right) + 2txy^2.$$

Lösning: (i) Vi använder kedjeregeln för att beräkna derivatorna. Sätt $x = v^2, y = uv, z = -u^2$ och låt $g_1 = \frac{\partial g}{\partial x}$, etc. Vi har då

$$\frac{\partial g}{\partial u} = vg_2 - 2ug_3,$$

och

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} = \frac{\partial}{\partial v}(vg_2 - 2ug_3) = g_2 + 2v^2 g_{21} + uvg_{22} - 4uvg_{31} - 2u^2 g_{32}.$$

(ii) Vi sätter $z = z(t, x(t,y), y(t))$ och beräknar

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$= \cdots = xy^2 + ty^2\left(1 + \frac{y+2t}{y+t^2}\right) + 2txy^2.$$

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. (a) Låt $f(x, y) = x + 4y$. Bestäm det största och minsta värdet som $f(x, y)$ antar på ellipsen $x^2 + 2y^2 = 9$. (3p)

Lösning: Vi använder Lagrange metod. Sätt $g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 9$ och bilda Lagrangefunktionen

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x + 4y + \lambda(x^2 + 2y^2 - 9).$$

Vi söker kritiska punkter

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 1 + 2x\lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 4 + 4y\lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x^2 + 2y^2 - 9 = 0$$

Vi delar den andra ekvationen med 4 vilket ger oss följande från första och andra

ekvationen

$$1 = -2x\lambda, \qquad 1 = -y\lambda$$

vilket är ekvivalent med

$$-2x\lambda = -y\lambda,$$

eller

$$y - 2x = 0.$$

Vi har alltså relationen $y = 2x$. Insättning i tredje ekvationen ger

$$0 = x^2 + 2(2x)^2 - 9 = 9x^2 - 9 = 0,$$

vilken har lösningar $x = \pm 1$. Således får vi även $y = \pm 2$. Funktionens värden i dessa punkter är

$$f(1, 2) = 9 = f_{max}, \qquad f(-1, -2) = -9 = f_{min}.$$

(b) Låt $g(x, y) = \sin(x \cos y)$. Bestäm det största värde riktningsderivatan $D_{\mathbf{u}}g(x, y)$ kan anta i punkten $(x, y) = (0, 0)$. (1.5p)

Lösning: Riktningsderivatan ges av $D_{\mathbf{u}}g(x, y) = \mathbf{u} \cdot \nabla g(x, y)$ där $\mathbf{u}$ är en enhetsvektor. Vi beräknar de partiella derivatorna

$$g_1(x, y) = \cos y \cos(x \cos y), \qquad g_2(x, y) = (-x \sin y) \cos(x \cos y),$$

och i punkten $(0, 0)$ får vi

$$g_1(0, 0) = 1, \qquad g_2(0, 0) = 0.$$

Kom nu ihåg att skalärprodukten mellan två vektorer $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ alltid kan skrivas

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = |\mathbf{v}_1|\,|\mathbf{v}_2| \cos\theta,$$

där θ är vinkeln mellan vektorerna. Om vi tillämpar detta på vår riktningsderivata i punkten $(0, 0)$ får vi

$$D_{\mathbf{u}}g(0, 0) = \mathbf{u} \cdot \nabla g(0, 0) = \underbrace{|\mathbf{u}|}_{=1}\,|\nabla g(0, 0)| \cos\theta = |\nabla g(0, 0)| \cos\theta = |(1, 0)| \cos\theta = \cos\theta.$$

Eftersom $\cos\theta$ tar värden mellan 0 och 1 har vi att riktningsderivatan antar sitt maximum då $\cos\theta = 1$, dvs $D_{\mathbf{u}}g(0, 0) = 1$ är det maximala värdet.

Godkäntdelen: del 2

Till uppgift 3 nedan räcker det med svar (ingen motivering behövs), men för uppgift 4-7 skall fullständiga lösningar redovisas. Motivera och förklara så väl du kan. Alla lösningar anges på separat skrivpapper.

3. i) Ange om följande är sant eller falskt.
Påstående: *Rotationen av varje vektorfält är divergensfritt.* (0.5p)

Svar: Sant

ii) Låt $f(x, y, z)$ vara en skalär funktion och $\mathbf{F}(x, y, z)$ ett vektorfält. Vilket av följande konstruktioner är matematiskt meningsfulla? (0.5p)

A $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, f$.
B $\mathrm{grad}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{F}$.
C $\mathrm{div}\,\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{F}$
D $\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{grad}\, f$

Svar: A

iii) Ange om följande är sant eller falskt: (0.5p)
Påstående: *Varje rotationsfritt vektorfält är konservativt.*

Svar: Falskt.

4. Beräkna dubbelintegralen

$$I = \iint_R e^{x^2}\, dA = \int_0^1 dy \int_{2y}^2 e^{x^2}\, dx.$$

(2p)

Lösning: Man kan inte utföra integralen över x direkt eftersom e^{x^2} ej har någon primitiv funktion. Istället identifierar vi området som skall integreras över till

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2y \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Detta är angivet på x-enkel form. Vi noterar nu att vi kan kasta om gränserna och istället skriva det på y-enkel form enligt:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x/2\}.$$

Med denna ändrade beskrivning av R kan vi utföra integralen i omvänd ordning:

$$I = \iint_R e^{x^2}\, dA = \int_0^2 dx \int_0^{x/2} e^{x^2}\, dy = \frac{1}{2}\int_0^2 x e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^2 = \frac{1}{4}(e^4 - 1).$$

5. Låt $\mathcal{C}$ vara en kurva i $\mathbb{R}^3$ som startar i $(0,0,0)$ och slutar i $(1,1,1)$. Bestäm värdet av arbetsintegralen

$$A = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

där vektorfältet ges av

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x-z)\mathbf{i} + (y-z)\mathbf{j} - (x+y)\mathbf{k},$$

genom att

(a) välja en lämplig parametriserad kurva $\mathcal{C}$ och beräkna A direkt med hjälp av parametriseringen; (1.5p)

(b) använda huvudsatsen för kurvintegraler. (2p)

Lösning (a): Vi väljer den enklaste kurvan $\mathcal{C}$ mellan $(0,0,0)$ och $(1,1,1)$: en rät linje. Vi kan parametrisera denna med

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1.$$

Vi får då

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = -2t\mathbf{k}$$

och arbetsintegralen blir

$$A = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (-2t\mathbf{k}) \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} dt = -2 \int_0^1 t dt = -1.$$

Lösning (b): Nu skall vi utföra integralen genom att använda hvudsatsen för kurvintegraler. Denna sats säger att för ett konservativt vektorfält $\mathbf{F} = \nabla\phi$ har vi att integralen längs $\mathcal{C}$ från P_0 till P_1 blir

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(P_1) - \phi(P_0).$$

I vårt fall har vi mycket riktigt att vektorfältet är konservativt, $\mathbf{F} = \nabla\phi$, med potential given av

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - (x+y)z + C.$$

Enligt huvudsatsen blir integralen alltså

$$A = \int_{\mathcal{C}} \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(1,1,1) - \phi(0,0,0) = (1-2) - 0 = -1,$$

vilket stämmer överens med svaret i (a).

6. Beräkna volymen av den kropp som begränsas av ytorna $2z - x^2 - y^2 = 0$ och $x + y + z = 1$.

(3.5p)

Lösning. Vi vill beräkna volymen av den domän D som begränsas av funktionsytorna $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ och $z = 1 - x - y$, dvs integralen

$$\mathrm{Vol}(D) = \iiint_D dV.$$

Gränserna för z-variabeln ges av de två ytorna, dvs

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leq z \leq 1 - x - y.$$

För att ta reda på gränserna i (x, y)-led måste vi bestämma skärningskurvan mellan ytorna, dvs:

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) = 1 - x - y.$$

Genom att komplettera kvadraten ser vi att detta motsvarar en cirkel:

$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$$

med centrum i $(-1, -1)$ och radie 2. Gränserna för (x, y) ges alltså av disken $B = \{(x + 1)^2 + (y + 1)^2 \leq 4\}$. Vi kan nu beräkna den itererade volymsintegralen

$$\mathrm{Vol}(D) = \iint_B dA \int_{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}^{1-x-y} dz = \frac{1}{2} \iint_B \Big(4 - (x + 1)^2 - (y + 1)^2\Big) dxdy.$$

Vi går nu över till polära koordinater för domänen B:

$$x = -1 + r\cos\theta, \qquad y = -1 + r\sin\theta,$$

vilket ger

$$\mathrm{Vol}(D) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4 - r^2) r dr = \cdots = 4\pi.$$

7. En partikel färdas under inverkan av en kraft $\mathbf{F}(x,y) = e^x\mathbf{i} + (1+xy^2)\mathbf{j}$ längs en halvcirkel i området $x \geq 0$ från punkten $(0,-1)$ till $(0,1)$. Använd Greens sats för att beräkna det uträttade arbetet. (3.5p)

Lösning: Partikeln färdas längs en halvcirkel $\mathcal{C}$ med radie 1 från $(0,-1)$ till $(0,1)$. Både start och slutpunkt ligger alltså på y-axeln. Arbetet ges av integralen

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Man kan beräkna arbetet genom att parametrisera $\mathcal{C}$ och utvärdera integralen direkt. I uppgiften efterfrågas dock att vi skall bestämma arbetet med hjälp av Greens sats. Greens sats säger att:

$$\iint_D \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} dA = \oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Att använda Greens sats för att beräkna arbetet innebär alltså att hitta ett sätt att byta kurvintegralen (som definierar arbete) mot en dubbelintegral. Vi kan inte använda detta direkt eftersom vår kurva $\mathcal{C}$ ej är sluten. Vi måste därför först sluta kurvan. Vi kan göra detta enkelt genom att lägga till den räta linjen γ längs med y-axeln från $(0,1)$ ner till $(0,-1)$. Tillsammans utgör dessa kurvor randen $\partial D = \mathcal{C} \cup \gamma$ till halva disken

$$D = \{x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}.$$

Enligt Greens formel kan vi då skriva

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} dA - \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Vi beräknar nu de två integralerna i högerledet i tur ordning.

$$\iint_D \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} dA = \iint_D y^2 dx dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{\sin^2\theta}_{=\frac{1-\cos 2\theta}{2}} \int_0^1 r^3 dr = \cdots = \frac{\pi}{8}.$$

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^{-1} \mathbf{F}(0,t) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = -\int_{-1}^{1} (1, 1 + 0 \cdot t^2) \cdot (0,1) dt = -\int_{-1}^{1} dt = -2.$$

Det sökta arbetet blir således:

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\pi}{8} - (-2) = \frac{\pi}{8} + 2.$$

8. Låt $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + z^2\mathbf{k}$ och låt D vara den domän som begränsas av planet $z = 1$ och ytan $z = x^2 + y^2$.

(a) Beräkna det totala flödet av $\mathbf{F}$ ut ur D. (2p)

(b) Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ ut ur ytan $z = x^2 + y^2$. (2p)

Lösning (a): Domänen D är sluten med rand given av $\partial D = S = S_1 \cup S_2$, där S_1 är den del av $z = x^2 + y^2$ som ligger under planet $z = 1$ och S_2 är den del av planet $z = 1$ som ligger inuti ytan $z = x^2 + y^2$. Vi vill beräkna flödesintegralen

$$I = \oiint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$$

där $\hat{\mathbf{N}}$ är normalen ut ur S. Eftersom ytan S är sluten kan vi använda Gauss sats:

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV.$$

Divergensen av vektorfältet ges av

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = y + 2z.$$

Vi har alltså

$$I = \iiint_D (y + 2z) dV.$$

Gränserna för z-integralen är $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$ och i (x, y)-led har vi skärningen $x^2 + y^2 = 1$ vilket är circkeln som omger disken $B = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$. Eftersom denna är symmetrisk kring origo ser vi att bidraget från y-termen i trippelintegralen försvinner: $\iiint_D y dV = 0$. Således beräknar vi

$$I = 2 \iint_B dA \int_{x^2+y^2}^{1} z dz = \iint_B \left(1 - (x^2 + y^2)^2\right) dA = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 - r^4) r dr = \frac{2\pi}{3}.$$

Lösning (b): Nu söker vi flödet ut genom paraboloiden S_1 som ges av $z = x^2 + y^2$, dvs vi vill beräkna flödesintegralen

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS.$$

Vi skulle kunna beräkna denna integral direkt genom att notera att S_1 är en nivåyta $G(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0$ och använda normalen ∇G etc. Det är dock ännu enklare att notera att vi kan använda resultatet från (a), nämligen

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \underbrace{\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV}_{=2\pi/3} - \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS.$$

Vi behöver alltså endast beräkna flödet *upp* genom planet S_2: $z = 1$. En normal ges av $\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{k}$ och således

$$\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} = z^2 = 1, \quad \text{på} \quad S_2.$$

Alltså

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iint_{S_2} dS = \text{area}(S_2) = \pi.$$

Flödet genom S_1 blir alltså

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \frac{2\pi}{3} - \pi = -\frac{\pi}{3}.$$