Tentamen
TMA044 Flervariabelanalys - Omtentamen E2/DI3 (med lösningar)

2020-08-28 kl. 08.30–12.30

Examinator: Daniel Persson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Jimmy Aronsson , telefon: anknytning 5325

Hjälpmedel: endast bifogat formelblad, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För att få slutbetyg på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se sidan 4

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3-8 se sidan 5

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

8. Låt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara ett överallt definierat vektorfält.

(a) Låt $\mathcal{C}_1$ och $\mathcal{C}_2$ vara två kurvor som börjar i en punkt P_1 och slutar i en punkt P_2. Använd Greens sats för att beräkna skillnaden $\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ i termer av dubbelintegraler. (4p)

(b) Använd ovanstående observation och lämpliga identiteter för att bevisa att om $\mathbf{F}$ är konservativt, så är arbetsintegralen oberoende av väg. (2p)

Lösning:

(a) Eftersom kurvan $\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2$ är en sluten kurva (där notationen betyder att jag först går längs $\mathcal{C}_1$ från början till slut, och sen tillbaka längs $\mathcal{C}_2$, säger Greens sats att detta är en dubbelintegral över det inre R. Mer precist är

$$\int_{\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} dxdy.$$

(b) Antag att $\mathbf{F} = \nabla\phi$ för någon potential $\phi(x, y)$. Eftersom $\mathbf{curlF} \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$, följer det från att blandade derivator kommuterar.

9. Bevisa nedanstående:

(a) Gauss divergenssats för enhetskuben i $\mathbb{R}^3$. (4p)

(b) Identiteten $\operatorname{rot}\operatorname{grad} = 0$. (2p)

Lösning: Se boken.

10. Definiera begreppen gradient och riktningsderivata, samt formulera och bevisa relationen mellan dem. (6p)

Lösning: Se boken.

Formelblad för TMA044

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ , \ 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.

Anonym kod	**TMA044 Flervariabelanalys - Omtentamen E2/DI3 (med lösningar) 2**

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall svar anges på separat skrivpapper.

(a) i) Ekvationen $x^2 + y^2 - z = -1$ beskriver

A. En paraboloid med minimum i $z = 1$.
B. En cylinder längs z-axeln med radie 1.
C. En cirkel i planet $z = -1$.
D. En konisk yta med singulär minpunkt i $z = 1$.

(0.5p)

Svar: A

ii) Randen till $-5 \leq x \leq 6$ i $\mathbb{R}$ är

A. tom
B. hela intervallet $(-5, 6)$
C. punkterna $x = -5$ och $x = 6$
D. inte definierad

(0.5p)

Svar: C

iii) **Påstående:** Om $f(x, y)$ är partiellt deriverbar i (a, b) så är $f(x, y)$ kontinuerlig i (a, b).

Ange vilket alternativ nedan som stämmer.

A Sant
B Falskt

(0.5p)

Svar: B

(b) Låt $f(x, y) = x^3 + y^2$.

i. Bestäm ekvationen för tangentplanet till funktionsytan $z = f(x, y)$ i punkten $(x, y) = (1, 1)$. (1.5p)

ii. Ange en enhetsnormal $\hat{\mathbf{n}}$ till tangentplanet ovan i $(x, y) = (1, 1)$. (1p)

Lösning: (i) Ekvationen för tangentplanet till en funktionsyta i (a, b) ges av

$$z = f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b)$$

I vårt fall har vi

$$f_1(x, y) = 3x^2, \qquad f_2(x, y) = 2y$$

I punkten $(a, b) = (1, 1)$ får vi

$$f_1(1, 1) = 3, \qquad f_2(1, 1) = 2.$$

Tangentplanets ekvation är således

$$z = 2 + 3(x-1) + 2(y-1)$$

eller, något omskriven,

$$3x + 2y - z = 3.$$

Lösning: (ii) Normalen till en funktionsyta i punkten (a, b) ges av

$$\mathbf{n} = -f_1(a,b)\mathbf{i} - f_2(a,b)\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

I punkten $(1, 1)$ har vi alltså

$$\mathbf{n} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Enhetsnormalen blir då

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{-3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{14}}.$$

(c) Låt $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^2$ vara kurvan som definieras av ekvationen

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{1}{2} = x - y$$

i. Beskriv vilken typ av kurva $\mathcal{C}$ är. (0.5p)

Lösning: Vi kan skriva om ekvationen genom att komplettera kvadraten och vi ser då att den motsvarar

$$\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1.$$

Detta är en ellips med $a = \sqrt{2}$ och $b = 2$ med centrum i $(1, -2)$.

ii. Bestäm en parametrisering av $\mathcal{C}$. (1p)

Lösning: En parametrisering ges av

$$x(t) = 1 + \sqrt{2}\cos t, \qquad y(t) = -2 + 2\sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

iii. Beräkna längden av kurvan $y = 3x$ mellan $x = -1$ och $x = 1$. (2p)

Lösning: Kurvlängden av en funktionskurva $y = f(x)$ ges i allmänhet av

$$\ell = \int_{\mathcal{C}} ds = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Vi har

$$f(x) = 3x, \quad f'(x) = 3$$

vilket ger

$$\sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

Kurvlängden blir således

$$\ell = \int_{-1}^{1} \sqrt{10} dx = 2\sqrt{10}.$$

(d) Låt $g(s,t) = f(x(s,t), y(s,t))$ där $x(s,t) = 2s + 3t$ och $y(s,t) = 3s - 2t$.

i. Beräkna $\frac{\partial^2 g}{\partial s^2}$ i termer av de partiella derivatorna av f. (2p)

ii. Beräkna $\frac{\partial^2 g}{\partial s \partial t}$ i termer av de partiella derivatorna av f. (2p)

Lösning: (i) Vi använder kedjeregeln för att beräkna derivatorna. Detta ger

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right) = \cdots = 4f_{11} + 12f_{12} + 9f_{22}.$$

(ii) På samma sätt får vi

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s \partial t} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \cdots = 6f_{11} + 5f_{12} - 6f_{22}.$$

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Låt $f(x, y) = 10 + x^3 + y^3 - 3xy$.

(a) Bestäm och klassificera alla extrempunkter till $f(x, y)$ på den domän D i $\mathbb{R}^2$ som begränsas av triangeln med hörn i $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$, dvs

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}.$$

(3p)

Lösning: Vi letar först efter kritiska punkter, dvs

$$f_1(x, y) = 3x^2 - 3y = 0, \qquad f_2(x, y) = 3y^2 - 3x = 0.$$

De enda lösningarna är

$$(0, 0) \quad \text{och} \quad (1, 1).$$

Endast $(0, 0)$ ligger i domänen D. För att bestämma vilken sorts punkt det är beräknar vi Hessianen:

$$H(f) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

I punkten $(0, 0)$ får vi därför

$$\det H(f)(0, 0) = \det \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = -9 < 0.$$

Eftersom determinanten är negativ kan vi dra slutsatsen att detta är en *sadelpunkt*.
Vi måste dessutom analysera om det kan finnas ytterligare kritiska punkter på randen till D. Vi börjar med linjesegmentet längs x-axeln, dvs linjen $(x, 0), 0 \leq x \leq 1$, vilket ger

$$3x^2 = 0.$$

Detta ger alltså ingen ny kritisk punkt. Detsamma gäller linjen längs y-axeln. Vi kan parametrisera hypotenusan med linjen $y = 1 - x$, och vi får därför funktionen

$$g(x) = f(x, 1 - x) = 10 + x^3 + (1 - x)^3 - 3(x - x^2).$$

Kritiska punkter ges då av

$$g'(x) = 3x^2 - 3(1 - x)^2 - 3 + 6x = 0.$$

Efter förenkling ger detta ekvationen

$$-6 + 12x = 0$$

med lösning

$$x = 1/2.$$

Eftersom $y = 1 - x$ får vi en ny kritisk punkt i

$$(1/2, 1/2).$$

Funktionens värde i denna punkt är

$$f(1/2, 1/2) = \frac{19}{2},$$

som skall jämföras med värdet i sadelpunkten $(0, 0)$:

$$f(0, 0) = 10.$$

Vi måste även kolla hörnen på triangeln, dvs $(1, 0)$ och $(0, 1)$, där vi har

$$f(1, 0) = f(0, 1) = 11.$$

Vi drar därför slutsatsen att $(1/2, 1/2)$ är en *minpunkt* på triangeln D, medan $(1, 0)$ och $(0, 1)$ är båda maxpunkter.

(b) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till $f(x, y)$ i punkten $(2, 2)$. (1p)

Lösning: Sätt $h = x - 2$ och $k = y - 2$. Taylorpolynomet blir då

$$f(h, k) = f(2, 2)+f_1(2, 2)h+f_2(2, 2)k+\frac{1}{2}\Big(h^2 f_{11}(2, 2)+2hkf_{12}(2, 2)+k^2 f_{22}(2, 2)\Big)+\cdots$$

Om vi stoppar in funktionsvärdena får vi slutsvaret

$$f(h, k) = 14+6(h+k)+\tfrac{1}{2}(12h^2-6hk+12k^2)+\cdots = 14+6(h+k)+6h^2-3hk+6k^2+\cdots$$

(c) Bestäm riktningsderivatan av $f(x, y)$ i punkten $(2, 2)$ i riktningen $\mathbf{i} + \mathbf{j}$. (0.5p)

Lösning: Riktningsderivatan i en punkt (a, b) ges av

$$D_{\mathbf{u}} f(a, b) = \mathbf{u} \cdot \nabla f(a, b),$$

där $\mathbf{u}$ är en enhetsvektor. Eftersom $|\mathbf{i} + \mathbf{j}| = \sqrt{2}$ definierar vi

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{2}}.$$

Vi har då

$$\mathbf{u} \cdot \nabla f(a, b) = \frac{6}{\sqrt{2}} + \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}.$$

Godkäntdelen: del 2

Till uppgift 3 nedan räcker det med svar (ingen motivering behövs), men för uppgift 4-7 skall fullständiga lösningar redovisas. Motivera och förklara så väl du kan. Alla lösningar anges på separat skrivpapper.

3. i) Ange om följande är sant eller falskt.
Påstående: *Om* $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *är ett rotationsfritt vektorfält så är arbetet som* $\mathbf{F}$ *uträttar mellan två punkter* A *och* B *beroende av vägen.* (0.5p)

Svar: Falskt

ii) Ange om följande är sant eller falskt.
Påstående: *Låt* B^3 *vara den solida bollen i* $\mathbb{R}^3$ *med radie 1. Integralen* $\iiint_{B^3}(x^2 + y^2 + z^2)dV$ *beräknar volymen av* B^3. (0.5p)

Svar: Falskt

iii) Vilka av följande påståenden är korrekta? (1p)

A Ekvationen för tangentplanet till nivåytan $G(x, y, z)$ i punkten $\mathbf{a} = (a, b, c)$ ges av $z = \nabla G \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{a})$.

B En normal till funktionsytan $z = f(x, y)$ ges av $f_1(x, y)\mathbf{i} + f_2(x, y)\mathbf{j}$.

C Stokes sats kan ses som en generalisering av analysens huvudsats till flera dimensioner.

D Formeln för kurvlängd är oberoende av val av koordinatsystem längs kurvan.

E Det totala flödet av ett rotationsfritt vektorfält är alltid noll.

Svar: C, D

4. Räkna ut $\iint_D \frac{1}{y} e^{x/y} dA$ över området D som begränsas av $y = x$ och $x = y^2$. (2p)

Lösning: Området som begränsas av $y = x$ och $x = y^2$ har y-värden mellan $y = 0$ och $y = 1$. Om vi alltså skivar området med avseende på y får vi att integralen ges av

$$\int_0^1 \int_{y^2}^{y} \frac{1}{y} e^{x/y} dx dy.$$

Vi får att första integralen ges av $\int_{y^2}^{y} \frac{1}{y} e^{x/y} dx = \left[e^{x/y}\right]_{y^2}^{y} = e - e^y$. Den sista integralen är standard och ges av

$$\int_0^1 (e - e^y) dy = e - (e - 1) = 1$$

5. Låt $\mathcal{C}$ vara kurvan som parametriseras av $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + (10 - t^2)\mathbf{k}$ för $0 \leq t \leq 2$. Bestäm värdet av integralen

$$\int_{\mathcal{C}} \sin x \, dx + y \, dy - 30z \, dz$$

genom att

(a) beräkna kurvintegralen direkt med hjälp av parametriseringen; (3p)

Lösning: Parametriseringen ger oss $x(t) = 1, y(t) = 2t, z(t) = 10 - t^2$ och den parametriserade integralen kan således skrivas

$$I = \int_0^2 \Big(\sin x(t)\, x'(t) + y(t)\, y'(t) - 30z(t)\, z'(t) \Big)\, dt = \int_0^2 \Big(4t + 60t(10 - t^2) \Big) dt.$$

Detta är nu en vanlig envariabelintegral och kan beräknas direkt:

$$I = \int_0^2 \Big(4t + 600t - 60t^3 \Big) dt = \left[\frac{4t^2}{2} + \frac{600t^2}{2} - \frac{60t^4}{4} \right]_0^2 = 968.$$

(b) utnyttja det faktum att vi kan tolka kurvintegralen som arbetet utfört av ett konservativt vektorfält $\mathbf{F}$ längs kurvan $\mathcal{C}$. (2p)

Lösning: Vi noterar nu att kurvintegralen kan skrivas som en arbetsintegral

$$I = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

där vektorfältet ges av $\mathbf{F} = \sin x\, \mathbf{i} + y\, \mathbf{j} - 30z\, \mathbf{k}$. Detta är konservativt och kan skrivas $\mathbf{F} = \nabla \phi$ där en potential ges av

$$\phi(x, y, z) = -\cos x + \frac{y^2}{2} - 15z^2.$$

Eftersom konservativa vektorfält är vägoberoende har vi direkt

$$I = \int_{\mathcal{C}} \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{r}(2)) - \phi(\mathbf{r}(0)) = \phi(1, 4, 6) - \phi(1, 0, 10) = 968.$$

6. Använd Greens formel för att visa att interiören av ellipsen (4.5p)

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

har en area som ges av πab.

Lösning. Greens formel säger allmänt att

$$\iint_D \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}\, dA = \oint_{\partial D = \mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Arean av en domän D ges i sin tur av

$$area(D) = \iint_D dA$$

och för att kunna tillämpa Greens formel söker vi alltså ett vektorfält $\mathbf{F}(x,y)$ så att

$$\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} = 1.$$

Ett möjligt val är

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{1}{2}(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}).$$

Med detta val ger Greens formel att arean kan uttryckas som linjeintegralen över kurvan $\mathcal{C}$ som omsluter D:

$$area(D) = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}} (-y, x) \cdot (dx, dy) = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}} (xdy - ydx).$$

För att beräkna denna måste vi parametrisera $\mathcal{C}$. I vårt exempel är $\mathcal{C}$ given av ellipsen och kan parametriseras enligt:

$$x = h + a\cos\theta, \qquad y = k + b\sin\theta, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Med denna parametrisering kan vi skriva linjeintegralen som

$$\frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}} (xdy - ydx) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \Big[(h + a\cos\theta)(b\cos\theta) - (k + b\sin\theta)(-a\sin\theta)\Big]\, d\theta$$

Genom att använda trigonometriska ettan $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ kan vi förenkla detta till integralen

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (hb\cos\theta + ak\sin\theta + ab)\, d\theta = \frac{1}{2}\Big[hb\sin\theta - ak\cos\theta + ab\theta\Big]_0^{2\pi}.$$

Vi får då slutligen

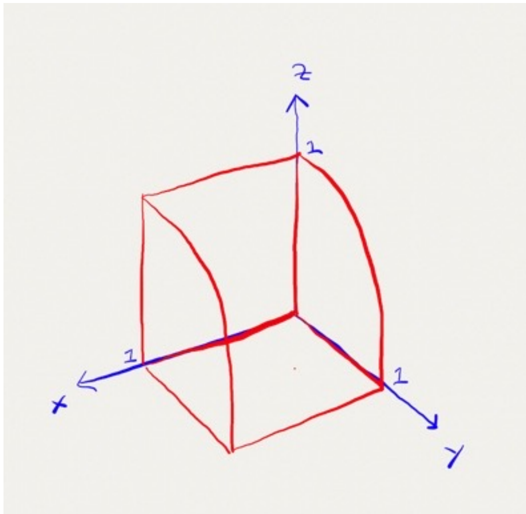
$$area(D) = \frac{1}{2}\left(hb\sin 2\pi - ak\cos 2\pi + ab2\pi - hb\sin 0 + ak\cos 0\right) = \pi ab,$$

där vi använt att $\sin 2\pi = \sin 0 = 0$ och $\cos 2\pi = \cos 0 = 1$.

7. Låt S vara ytan som utgörs av den del av cylindern $y^2 + z^2 = 1$ som ligger i första oktanten och mellan planen $x = 0$ och $x = 1$. Låt D vara soliden som begränsas av ytan S, koordinatplanen, samt planet $x = 1$ (se bild nedan). Låt $\mathbf{F}$ vara vektorfältet

$$\mathbf{F} = 3xz^2\mathbf{i} - x\mathbf{j} - y\mathbf{k}.$$

(4.5p)



(a) Använd Gauss sats för att beräkna det totala flödet av $\mathbf{F}$ ut ur D.

(b) Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ ut genom ytan S.

Lösning (a): Det totala flödet från D ges av flödesintegralen

$$\iint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$$

Enligt Gauss sats kan vi även beräkna detta genom volymsintegralen

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV.$$

Divergensen av $\mathbf{F}$ blir

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \cdots = 3z^2.$$

Det totala flödet ges då av

$$3 \iiint_D z^2 dV = 3 \int_0^1 dx \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (r^2 \cos^2 \theta) r dr = \frac{3\pi}{16}.$$

Lösning (b): Vi vill beräkna flödesintegralen

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$$

Vi kan utnyttja vårt resultat i (a) på följande vis. Randen ∂D består av 5 delar vilka vi betecknar med S_1, S_2, S_3, S_4 samt S. Vi låter S_1 vara botten (dvs $z = 0$), S_2 vara sidan där $y = 0$, S_3 vara koordinatplanet $x = 0$ och slutligen S_4 vara planet $x = 1$. Enligt Gauss sats kan vi nu beräkna flödet genom S enligt

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \underbrace{\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV}_{=\frac{3\pi}{16}} - \sum_{i=1}^{4} \iint_{S_i} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}_i dS_i$$

Vi beräknar de fyra flödesintegralerna i ordning. På ytan S_1 har vi $z = 0$ och normal $\hat{\mathbf{N}}_1 = -\mathbf{k}$. Flödet blir

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{k}) dS_1 = \iint_{S_1} y dS_1 = \int_0^1 y dy \int_0^1 dx = \frac{1}{2}.$$

Vi går vidare till S_2 där vi har $y = 0$ och $\hat{\mathbf{N}}_2 = -\mathbf{j}$. Detta ger $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}_2 = x$ och flödet blir

$$\iint_{S_2} x dS_2 = \int_0^1 x dx \int_0^1 dz = \frac{1}{2}.$$

På S_3 har vi $x =$ och $\hat{\mathbf{N}}_3 = -\mathbf{i}$ vilket ger $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}_3 = -3xz^2 = 0$. Flödet genom S_3 är alltså noll.

Slutligen har vi S_4. Här är $x = 1$ och $\hat{\mathbf{N}}_4 = \mathbf{i}$ vilket ger $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}_4 = 3xz^2 = 3z^2$. Flödet blir

$$\int_{S_4} 3z^2 dS_4 = 3 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 (r^2 \cos^2 \theta) r dr = \frac{3\pi}{16}.$$

Vi samlar nu ihop alla våra delresultat och får flödet genom S till

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \frac{3\pi}{16} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 0 - \frac{3\pi}{16} = -1.$$