

Uppgift 1 (4 p)

Simlandslagets coach ska planera sitt lag i lagkappen 4 * 100 meter medley för damer på ett mästerskap. (En medley-lagkapp innebär att de fyra simmarna i laget simmar var sin sträcka och med var sitt simsätt.) Coachen vet att de fem simmare som finns tillgängliga är olika bra på de olika simsätten. Tabellen nedan visar vilken tid (i sekunder) respektive simmare kan förväntas simma 100 meter med respektive simsätt. Frågan är nu hur laget bäst ska formeras.

Sträcka/simsätt	Sarah	Michelle	Louise	Anna-Karin	Carina
1. Ryggsim	50	51	54	56	55
2. Bröstsims	53	57	54	54	56
3. Fjärilsim	54	52	51	55	56
4. Frisim	56	52	54	54	53

Uppgift: Formulera en LP-modell som kan användas för att bestämma vilken simmare som ska simma vilket simsätt i lagkappen så att lagets totala förväntade tid minimeras. Modellen ska kunna lösas i LINGO.

Uppgift 2 (2 p)

På ZAX AB kvalitetskontrolleras slutprodukten innan leverans till kund genom att en kontrollant steg för steg undersöker varje enskilt exemplar av produkten på fem olika sätt. Tiden för att utföra var och en av de fem olika undersökningsåtgärderna varierar enligt en exponentialfördelning med det förväntade värdet 2,4 minuter. I medeltal ankommer 3,0 exemplar av produkten per timme till kontrollanten enligt en Poissonprocess.

- Ange numret på den formel i formelsamlingen som används för att beräkna förväntad tid i kö i det aktuella systemet.
- Vad är den förväntade tiden i kö i det aktuella systemet? Ange svaret avrundat till hela minuter.
- Ange numret på den formel i formelsamlingen som används för att beräkna förväntat antal kunder i det aktuella systemet.
- Vad är det förväntade antalet kunder i det aktuella systemet? Ange svaret som ett decimaltal avrundat till två decimaler.

Uppgift 3 (2 p)

Till krogen Lytta Lottas Bar ankommer i medeltal 8 gäster per 15 minuter enligt en Poissonprocess. 25 % av ankommande gäster är VIP och resten är vanliga gäster. De tre vakterna jobbar individuellt med att kontrollera gästerna innan de släpps in, vilket i medeltal tar 5 minuter per gäst (varierar enligt en exponentialfördelning). Även VIP-gäster måste vänta på att någon av vakterna blir ledig innan kontroll kan inledas, men VIP-gäster får alltid gå före vanliga gäster i kön.

- Ange numret på den formel i formelsamlingen som används för att beräkna det förväntade antalet VIP-gäster i kö utanför Lytta Lottas Bar.
- Vad är det förväntade antalet VIP-gäster i kö utanför Lytta Lottas Bar? Ange svaret som ett decimaltal avrundat till en decimal.

- Ange numret på den formel i formelsamlingen som används för att beräkna sannolikheten att exakt fem vanliga gäster ankommer under en viss 15-minutersperiod.
- Vad är sannolikheten att exakt fem vanliga gäster ankommer under en viss 15-minutersperiod? Ange svaret som ett decimaltal avrundat till två decimaler.

Uppgift 4 (2 p)

På verkstadsgolvet i det tillverkande företaget Svarv Och Slip AB finns tre likadana maskiner. De behöver service med ojämna mellanrum, och så snart ett sådant behov uppstår för någon maskin tas den ur drift tills service har genomförts på maskinen av någon av de två servicepersonerna, varefter maskinen återgår i drift igen. Sannolikheten är 0,4 att servicebehov uppstår under en viss timme för en maskin som är i drift. Om båda servicepersonerna är upptagna när servicebehov uppstår för en maskin så får den maskinen vänta tills någon av servicepersonerna blir ledig. I medeltal tar det 2 timmar att serva en maskin, men servicetiden varierar enligt en exponentialfördelning.

- Ange numret på den formel i formelsamlingen som används för att beräkna det förväntade antalet maskiner som är ur drift på Svarv Och Slip AB.
- Vad är det förväntade antalet maskiner som är ur drift på Svarv Och Slip AB? Ange svaret som ett decimaltal avrundat till en decimal.
- Ange numret på den formel i formelsamlingen som används för att beräkna beläggningen i det aktuella kösystemet.
- Vad är beläggningen i det aktuella kösystemet? Ange svaret som ett decimaltal avrundat till två decimaler.

Uppgift 5 (1 p)

Som en konsekvens av en förändring av betjäningprocessen har ett kösystem fått minskad varians i sin servicetakt. Systemet var av typen M/M/1 före förändringen och är fortfarande av typen M/M/1 efter förändringen. Ankomstprocessen har inte ändrats på något sätt. Vilket av nedanstående påståenden stämmer bäst överens med denna situation?

- Genomloppstiden har blivit kortare
- Genomloppstiden har blivit längre
- Genomloppstiden har inte förändrats
- Det går inte att säga, baserat på informationen som ges, om/hur genomloppstiden har påverkats

Uppgift 6 (1 p)

Vilket av nedanstående påståenden är falskt?

- I ett kösystem med systemprioritet påverkas kunderna i den högsta prioritetsskassen inte av förändringar i lägre prioritetsskassers ankomsttakt
- I ett kösystem med köprioritet påverkas kunderna i den högsta prioritetsskassen inte av förändringar i lägre prioritetsskassers ankomsttakt

- c) Förväntat antal kunder i ett kösystem med en server, där ankomst- och serviceprocess båda är poissonprocesser, blir alltid lägre om antalet kunder som ryms i systemet är begränsat jämfört med om det är obegränsat
- d) I ett kösystem av typen $M/M/1/\infty/N$ kan förväntat antal kunder i kö skrivas som förväntat antal kunder i systemet minus förväntat antal kunder som betjänas

Uppgift 7 (4 p)

Nedan ses fyra st påståenden relaterade till LP. Avgör i respektive fall om påståendet är sant eller falskt. Observera särskilt att varje korrekt svar ger 1 p, varje felaktigt svar ger -1 p, och varje uteblivet svar ger 0 p. Totalt kan man dock inte få mindre än 0 p på denna uppgift.

- a) Begränsningsintervallet (*right hand side range*) för en viss restriktion svarar på hur konstanten i restriktionens högerled kan ändras utan att restriktionens skuggpris ändras.
- b) En ej bindande restriktion i en LP-modell kan ha ett skuggpris som är skilt från 0.
- c) Multiplikation av en binär variabel och en generell heltalsvariabel kan hanteras exakt inom ramen för linjär programmering.
- d) Vart och ett av de tre typfallen av stokastisk programmering (osäkra koefficienter i målfunktionen, osäkra konstanter i restriktionerna, samt osäkra koefficienter i restriktionerna) går att uttrycka linjärt som en motsvarande deterministisk modell om den underliggande statistiska fördelningen är kontinuerlig.

Uppgift 8 (4 p)

Ett produktvalsproblem med tre produkter (kallade A, B och C) samt två begränsade resurser (kallade Q och R) föreligger. TB för A och B ligger konstant på 6 resp 7 tkr / st, men p.g.a. lite märkliga avtal med olika kunder och leverantörer är TB för C styckvis linjär: för de första 30 är TB för C 3 tkr / st, för de nästa 30 är TB för C 5 tkr / st, och därefter är TB för C 10 tkr / st. Totalt får inte mer än 150 C produceras. Maximalt finns 1200 resp. 1150 st Q resp. R att tillgå. En A förbrukar 3 st Q och 6 st R, en B förbrukar 7 st Q och 5 st R, och en C förbrukar 5 st Q och 4 st R.

Din uppgift är att formulera en LP-modell som kan användas för att bestämma den TTB-maximerande produktionsplanen under dessa omständigheter. Produktionsplanen måste kännetecknas av att antalet producerade B inte understiger det lägsta av antalet producerade A och antalet producerade C. LP-modellen ska kunna lösas i LINGO.

Uppgift U9-U13 (Hendry, 1 p per st)

U9. Which of the following conditions best describes a process which is in statistical control?

- A. When the process can be controlled using statistics
- B. When there is no plotted point falling outside the control limits
- C. When the process has only natural variation
- D. When there is no plotted point falling outside the specification limits

U10. Which of the following statements best describes the width of a three-sigma x-bar control chart, that is, the distance from its lower limit (LCL) to its upper limit (UCL), in comparison to the width of the specification limits, that is, the distance from its lower limit

(LSL) to its upper limit (USL)? It is known that the x-bar chart is constructed using a subgroup size of four units ($n=4$) from a stable process which has a C_p value of one ($C_p=1$).

- A. The width of the x-bar chart is narrower than the width of the specification limits
- B. The width of the x-bar chart is wider than the width of the specification limits
- C. The width of the x-bar chart is as wide as the width of the specification limits
- D. It cannot be known for sure since it depends on other factors

U11. A company called XYZ just hired Kikki, a business analyst, to look at the way they work with statistical process control. Having collected the non-conforming units data, she found out that the process produced a lot more non-conforming units this month than last month. When she checked the report on how many signals the x-bar control chart has given, she was surprised since the number of signals was much lower this month than that of last month. Which of the following possible causes best describes what may have happened this month?

- A. A two-sigma x-bar chart may have been used instead of three-sigma x-bar chart
- B. There may have been many false alarms in the process
- C. A six-sigma x-bar chart may have been used instead of three-sigma x-bar chart
- D. A larger subgroup size for the x-bar chart may have been used

U12-U13. A semiconductor company called 'Phi' is considering using x-bar and R-chart for monitoring its gold plating process. The specification for the thickness of gold from the customer is 1 ± 0.12 mm. The process is assumed to be stable. It is known that the mean and the standard deviation of the process are 0.98 mm and 0.06 mm, respectively. The process owner wants the x-bar chart to signal, on average, 1 out of 3 points plotted ($1-\beta=30\%$), when there is a shift of 0.04 mm in the process mean. Furthermore, she also wants to have a false alarm rate of 0.27%, that is, on average 1 in 370 points plotted.

U12. Which of the following statements best describes the C_p and C_{pk} of the process?

- A. $C_p < C_{pk}$
- B. $C_p = C_{pk}$
- C. $C_p > C_{pk}$
- D. More information is needed to determine the C_p and C_{pk}

U13. Which of the following statements best approximates the process' fraction of non-conforming units or FNC (i.e. those outside the specification limits)?

- A. $FNC < 5\%$
- B. $5\% \leq FNC < 10\%$
- C. $10\% \leq FNC < 15\%$
- D. $FNC \geq 15\%$

Lösningsförslag

Uppgift 1

För rättningsmall, se underlaget till föreläsning F14 på Canvas. Tips: Börja alltid med att jämföra ert eget svar med lösningsförslaget nedan och att jämföra utfallen i LINGO, om ni har fått avdrag. Se även 11d i kurs-PM.

Variabler (20 st, alla binära)

- s_1 : binär variabel som får värdet 1 om Sarah simmar första sträckan, 0 annars
- s_2 : binär variabel som får värdet 1 om Sarah simmar andra sträckan, 0 annars
- ...
- c_4 : binär variabel som får värdet 1 om Carina simmar fjärde sträckan, 0 annars

```
Min      50s1+53s2+54s3+56s4+51m1+57m2+52m3+52m4+54l1+54l2+51l3+54l4+56a1+54a2+55a3+54a4+55c1+56c2+56c3+53c4
St       s1+s2+s3+s4 <= 1    ! Varje simmare simmar max en sträcka
        m1+m2+m3+m4 <= 1
        l1+l2+l3+l4 <= 1
        a1+a2+a3+a4 <= 1
        c1+c2+c3+c4 <= 1
        s1+m1+l1+a1+c1 = 1 ! Varje sträcka simmas av exakt en simmare
        s2+m2+l2+a2+c2 = 1
        s3+m3+l3+a3+c3 = 1
        s4+m4+l4+a4+c4 = 1

End
Int 20
```

Kommentar: Detta är ett tilldelningsproblem av standardtyp. Det kan hanteras antingen som ovan eller genom att balansera problemet (se boken) genom att lägga till en ”femte simsträcka” där alla simmare har den förväntade tiden 0 och som innebär att man inte är med i laget. Båda sätten är precis lika bra (och ger givetvis samma lösning).

Uppgift 2

$M/Er/1$ med $\Lambda = 3$ st per timme, $My = 60/(5*2,4) = 5$ st per timme, $k = 5$

0,5 p per deluppgift:

Ange numret på den formel i formelsamlingen som används för att beräkna förväntad tid i kö i det aktuella systemet.

- 30

Vad är den förväntade tiden i kö i det aktuella systemet? Ange svaret avrundat till hela minuter.

- 11

Ange numret på den formel i formelsamlingen som används för att beräkna förväntat antal kunder i det aktuella systemet.

- 33

Vad är det förväntade antalet kunder i det aktuella systemet? Ange svaret som ett decimaltal avrundat till två decimaler.

- 1,14 (även 1,15 godkänns av avrundningsskäl)

Uppgift 3

M/M/s/∞/∞/PQ (köprioritet) med $\Lambda_1 = 2$ st per kvart, $\Lambda_2 = 6$ st per kvart, $M_y = 15/5 = 3$ st per vakt och kvart, $s = 3$

0,5 p per deluppgift:

Ange numret på den formel i formelsamlingen som används för att beräkna det förväntade antalet VIP-gäster i kö utanför Lytta Lottas Bar.

- 90

Vad är det förväntade antalet VIP-gäster i kö utanför Lytta Lottas Bar? Ange svaret som ett decimaltal avrundat till en decimal.

- 0,2

Ange numret på den formel i formelsamlingen som används för att beräkna sannolikheten att exakt fem vanliga gäster ankommer under en viss 15-minutersperiod.

- 1

Vad är sannolikheten att exakt fem vanliga gäster ankommer under en viss 15-minutersperiod? Ange svaret som ett decimaltal avrundat till två decimaler.

- 0,16

Uppgift 4

M/M/s/∞/N med $\Lambda = 0,4$ st per maskin och timme, $M_y = 1/2 = 0,5$ st per serviceperson och timme, $s = 2$, $N = 3$

0,5 p per deluppgift:

Ange numret på den formel i formelsamlingen som används för att beräkna det förväntade antalet maskiner som är ur drift på Svarv Och Slip AB.

- 74

Vad är det förväntade antalet maskiner som är ur drift på Svarv Och Slip AB? Ange svaret som ett decimaltal avrundat till en decimal.

- 1,4

Ange numret på den formel i formelsamlingen som används för att beräkna beläggningen i det aktuella kösystemet.

- 77

Vad är beläggningen i det aktuella kösystemet? Ange svaret som ett decimaltal avrundat till två decimaler.

- 0,64

Uppgift 5

Som en konsekvens av en förändring av betjäningprocessen har ett kösystem fått minskad varians i sin servicetakt. Systemet var av typen M/M/1 före förändringen och är fortfarande av typen M/M/1 efter förändringen. Ankomstprocessen har inte ändrats på något sätt. Vilket av nedanstående påståenden stämmer bäst överens med denna situation?

- a) Genomloppstiden har blivit kortare
- b) Genomloppstiden har blivit längre**
- c) Genomloppstiden har inte förändrats
- d) Det går inte att säga, baserat på informationen som ges, om/hur genomloppstiden har påverkats

Förklaring: Varje poissonfördelad slumpvariabels varians är också lika med dess väntevärde (se *Kömodeller* sid 13). Lägre varians i servicetakten i det aktuella systemet innebär alltså, per definition, att servicetakten i sig har blivit lägre, annars hade det varit M/G/1 istället för M/M/1 efter förändringen. Lägre servicetakt ger därmed mindre kapacitetsmarginal, allt annat lika, och genomloppstiden i M/M/1 är inversen av kapacitetsmarginalen. Genomloppstiden har alltså blivit längre.

Uppgift 6

Vilket av nedanstående påståenden är falskt?

- a) I ett kösystem med systemprioritet påverkas kunderna i den högsta prioritetsskassen inte av förändringar i lägre prioritetsskassers ankomsttakt
- b) I ett kösystem med köprioritet påverkas kunderna i den högsta prioritetsskassen inte av förändringar i lägre prioritetsskassers ankomsttakt**
- c) Förväntat antal kunder i ett kösystem med en server, där ankomst- och serviceprocess båda är poissonprocesser, blir alltid lägre om antalet kunder som ryms i systemet är begränsat jämfört med om det är obegränsat
- d) I ett kösystem av typen M/M/1/∞/N kan förväntat antal kunder i kö skrivas som förväntat antal kunder i systemet minus förväntat antal kunder som betjänas

Förklaring: Eftersom ankommande kunder av högst prioritet får vänta på betjäning om alla servrar är upptagna i ett system med köprioritet kommer en högre ankomsttakt av kunder av lägre prioritet att leda till att det blir mer vanligt förekommande att ankommande kunder av högst prioritet får vänta på betjäning.

Uppgift 7

- a) Sant. Se kap 1 i boken.
- b) Falskt. Det är bara bindande restriktioner som kan ha ett skuggpris som är skilt från 0, eftersom det *ceteris paribus* inte kan finnas värde i att anskaffa mer av en resurs som inte redan nyttjas fullt ut.
- c) Sant. Se kap 24 i boken.
- d) Falskt. Se sid 268 i boken.

Uppgift 8

För rättningsmall, se underlaget till föreläsning F14 på Canvas. Tips: Börja alltid med att jämföra ert eget svar med lösningsförslaget nedan och att jämföra utfallen i LINGO, om ni har fått avdrag. Se även 11d i kurs-PM.

Variabler:

- a, b: antal A resp. B
- c1, c2, c3: antal C med resp. TB
- z1, z2: binära variabler som hanterar den styckvisa lineariteten
- y: binär variabel som hanterar minimikravet för antalet B

```
Max      6a+7b+3c1+5c2+10c3
St       3a+7b+5c1+5c2+5c3 <= 1200
         6a+5b+4c1+4c2+4c3 <= 1150
         c1 <= 30                               ! 30z1 <= c1 <= 30
         30z1-c1 <= 0
         c2-30z1 <= 0                           ! 30z2 <= c2 <= 30z1
         30z2-c2 <= 0
         c3-90z2 <= 0                           ! c3 <= 90z2
         b-a+9999y >= 0                         ! b >= a-9999y
         b-c1-c2-c3-9999y >= -9999            ! b >= c1+c2+c3-9999(1-y)

End
Int z1
Int z2
Int y
```

Kommentar: Detta är i grunden ett produktvalsproblem med styckvis linearitet. Det tillkommande kriteriet att antalet producerade B inte får understiga *det lägsta av* två andra storheter, antalet producerade A och antalet producerade C, är ett antingen/eller-problem, eftersom det innebär att *antingen* restriktionen $b \geq a$ *eller* restriktionen $b \geq \sum c$ måste gälla. Att t.ex. stipulera att *båda* de nämnda restriktionerna måste gälla är logiskt fel, för då har man specificerat en annan och mer inskränkande situation än vad som nämndes i uppgiften. Just det logiska felet att modellera detta som $b \geq \max(a, c)$ istället för $b \geq \min(a, c)$ var nog det vanligast förekommande logiska felet på uppgiften, även om det givetvis var många som löste klurigheten på ett bra sätt.

U9. Which of the following conditions best describes a process which is in statistical control?

- A. When the process can be controlled using statistics
- B. When there is no plotted point falling outside the control limits
- C. **When the process has only natural variation**
- D. When there is no plotted point falling outside the specification limits

U10. Which of the following statements best describes the width of a three-sigma x-bar control chart, that is, the distance from its lower limit (LCL) to its upper limit (UCL), in comparison to the width of the specification limits, that is, the distance from its lower limit (LSL) to its upper limit (USL)? It is known that the x-bar chart is constructed using a subgroup size of four units ($n=4$) from a stable process which has a C_p value of one ($C_p=1$).

- A. **The width of the x-bar chart is narrower than the width of the specification limits**
- B. The width of the x-bar chart is wider than the width of the specification limits
- C. The width of the x-bar chart is as wide as the width of the specification limits
- D. It cannot be known for sure since it depends on other factors

U11. A company called XYZ just hired Kikki, a business analyst, to look at the way they work with statistical process control. Having collected the non-conforming units data, she

found out that the process produced a lot more non-conforming units this month than last month. When she checked the report on how many signals the x-bar control chart has given, she was surprised since the number of signals was much lower this month than that of last month. Which of the following possible causes best describes what may have happened this month?

- A. A two-sigma x-bar chart may have been used instead of three-sigma x-bar chart
- B. There may have been many false alarms in the process
- C. **A six-sigma x-bar chart may have been used instead of three-sigma x-bar chart**
- D. A larger subgroup size for the x-bar chart may have been used

U12-U13. A semiconductor company called 'Phi' is considering using x-bar and R-chart for monitoring its gold plating process. The specification for the thickness of gold from the customer is 1 ± 0.12 mm. The process is assumed to be stable. It is known that the mean and the standard deviation of the process are 0.98 mm and 0.06 mm, respectively. The process owner wants the x-bar chart to signal, on average, 1 out of 3 points plotted ($1 - \beta = 30\%$), when there is a shift of 0.04 mm in the process mean. Furthermore, she also wants to have a false alarm rate of 0.27%, that is, on average 1 in 370 points plotted.

U12. Which of the following statements best describes the C_p and C_{pk} of the process?

- A. $C_p < C_{pk}$
- B. $C_p = C_{pk}$
- C. **$C_p > C_{pk}$**
- D. More information is needed to determine the C_p and C_{pk}

U13. Which of the following statements best approximates the process' fraction of non-conforming units or FNC (i.e. those outside the specification limits)?

- A. $FNC < 5\%$
- B. **$5\% \leq FNC < 10\%$**
- C. $10\% \leq FNC < 15\%$
- D. $FNC \geq 15\%$