1a) $G(s) = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{sRC}{1+sRC} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Frekv.svar} \\ s = j\omega \end{array} \right\} =$

$= G(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1+j\omega RC}$

$R = 5{,}0\ k\Omega$
$C = \frac{1}{6} \cdot 10^{-6}\ F$

Insignal $x(t) = 5\cos(692t)\ V \Rightarrow \omega = 692\ r/s$

Ampl. förändring $|G(j\omega)| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \approx 0{,}50 \quad (\omega = 692\ r/s)$

Fas försk. $\arg\{G(j\omega)\} = \arg\{j\omega RC\} - \operatorname{atan}\{\omega RC\} =$

$= 90° - 30° = 60°$

Svar: $y(t) = |G(j\omega)| \cdot 5\cos(692t + \arg\{G(j\omega)\}) = \{\omega = 692\ r/s\} =$

$= 2{,}5\cos(692t + 60°)\ V$

b) $x(t) = A\sin(\omega t) \qquad \omega = 1000\pi\ r/s$

Samplas: $x[n] = A\sin(\omega \cdot nT_s) = A\sin(\Omega n)$

i) $\Omega = \omega \cdot T_s = 1000\pi \cdot 50 \cdot 10^{-6} = 0{,}05\pi =$
$= \pi/20$ rad/sampel

ii) En period $= 2\pi$, Sampel/period $= \frac{2\pi}{\pi/20} = 40$

Alt. En period: $T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \frac{T}{T_s} = \frac{2\pi}{1000\pi \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = 40$

2. $H(z) = \frac{2z}{z-a} = 2\frac{1}{1-az^{-1}}$

Impulssvar $h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = 2a^n \cdot u[n]$

a/ Faltning ger $y[n] = \sum_{k=0}^{n} h[k]\,x[n-k] = \{x[n] = u[n-1]\} =$

$= \sum_{k=0}^{n} h[k]\,u[n-1-k]$

$y[0] = h[0]\,u[-1] = 0$
$y[1] = h[0]\,u[0] + h[1]\,u[-1] = 2\cdot a^0 = 2$
$y[2] = h[0]\,u[1] + h[1]\,u[0] + h[2]\cdot u[-1] = 2 + 2a$
$y[3] = h[0]\cdot u[2] + h[1]\,u[1] + h[2]\,u[0] + h[3]\,u[-1] = 2 + 2a + 2a^2 =$
$= 3{,}92$

$2(a^2 + a + 1) = 3{,}92$; $a^2 + a + 1 - \frac{3{,}92}{2} = 0$; $a^2 + a - 0{,}96 = 0$

$a = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 0{,}96} = -0{,}5 \pm 1{,}1 = \begin{cases} -1{,}6 \\ +0{,}6 \end{cases}$

Stabilt system Pol till $H(z)$ innanför E.C. $\Rightarrow a = 0{,}6$

b/ $X(z) = \frac{z}{z-1}\cdot z^{-1} = \frac{1}{z-1}$, $H(z) = \frac{2z}{z-a}$

$Y(z) = z\cdot\frac{2}{(z-1)(z-a)} = \{\text{P.B.U.}\} = z\left[\frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-a}\right]$

$2 = A(z-a) + B(z-1)$
$z = 1 \Rightarrow 2 = A(1-0{,}6) \Rightarrow A = \frac{2}{0{,}4} = 5$
$z = a = 0{,}6 \quad 2 = B(0{,}6-1) \Rightarrow B = -5$
$Y(z) = 5\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0{,}6}\right)$

$\Rightarrow y[n] = 5\left(1 - 0{,}6^n\right)\cdot u[n]$

Kontroll:
$y[3] = 5\left(1 - 0{,}6^3\right) = 3{,}92$

OK!

SSY080
160824

3. $x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$

$$h(t) = (8 - 5e^{-4t})u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} H(s) = \frac{8}{s} - \frac{5}{s+4} = \frac{8(s+4) - 5s}{s(s+4)} =$$

$$= \frac{3s+32}{s(s+4)}$$

$$x(t) = e^{-8t}u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = \frac{1}{s+8}$$

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{3s+32}{s(s+4)(s+8)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4} + \frac{C}{s+8}$$

$$3s + 32 = A(s+4)(s+8) + Bs(s+8) + Cs(s+4)$$

$$s = 0 \Rightarrow 32 = A \cdot 4 \cdot 8 \Rightarrow A = 1$$
$$s = -4 \Rightarrow -12 + 32 = B(-4) \cdot 4 \Rightarrow B = -\frac{5}{4}$$
$$s = -8 \Rightarrow -24 + 32 = C(-8)(-4) \Rightarrow C = \frac{1}{4}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{s+4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s+8}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \left(1 - \frac{5}{4}e^{-4t} + \frac{1}{4}e^{-8t}\right)u(t)$$

SSY080
160824

4. Fourierserie cosinus/sinus form (enl. Lab & Beta)

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega_0 t + B_n \sin n\omega_0 t)$$

Vår fyrkants $x(t)$ har medelvärdet noll och är udda, $x(t) = -x(-t)$ $\Rightarrow A_0 = 0$, $A_n = 0$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$

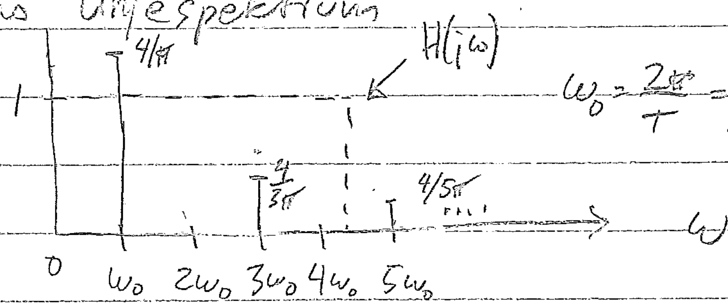
De tre första (nollskilda) Fourierserie koeff. enligt lab

$B_1 = \frac{4}{\pi}$; $B_2 = \frac{4}{3\pi}$; $B_5 = \frac{4}{5\pi}$ och är oberoende av ω_0.

Parsevals formel (Beta): $\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,dt = \frac{A_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(A_n^2 + B_n^2)$

$P_x = \frac{1}{T}\int_0^T 1 \cdot dt = \frac{1}{T}\left[t\right]_0^T = 1$ (Medeleffekt)

Signalens linjespektrum



$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi 10^{-2}} = 100$ r/s

Signaler med frekv. ω_0 och $3\omega_0$ passerar $H(j\omega)$

$$P_y = \frac{1}{2}(B_1^2 + B_3^2) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2\right) = 0{,}9006$$

Insignalens effekt $P_x = 1$

Utsignalens — " — $P_y = 0{,}9006$

Utsignalens effekt är $\frac{P_y}{P_x} \cdot 100\ \% = 90{,}06\ \%$ av insignalens effekt.

SSY080
160824

Se info på sidan innan

5/ Notera

i) $N=4$ för alla $x_i[n]$, Då måste även $X[k]$ ha $N=4$

Uteslut: X_h och X_e med $N=5$

ii) $X[0] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]$

$x_1[n]$: $\sum_{n=0}^{3} x_1[n] = 1 \Rightarrow X[0]=1$ c, d, g OK

$$X[1] = \sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 1\cdot n} = 1+0+0+0 = 1$$

$$X[2] = \sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 2\cdot n} = 1+0+0+0 = 1$$

$\therefore$ $x_1[n] \xleftrightarrow{DFT} X_d[k]$

(Impuls ger bidrag vid alla frekvenser)

$x_2[n]$: $\sum_{n=0}^{3} x_2[n] = 0 = X[0]$

$\therefore$ $x_2[n] \xleftrightarrow{DFT} X_a[k]$

$x_3[n]$: $\sum_{n=0}^{3} x_3[n] = 2 = X[0]$ $\therefore$ $x_3[n] \longleftrightarrow X_f[k]$

$x_4[n]$: $\sum_{n=0}^{3} x_4[n] = 1 = X[0]$ c, g möjliga

OBS! $x_4[n]$ en konstant signal - (DC)

$X[k] \neq 0$ endast för $k=0$

$x_4[n] \xleftrightarrow{DFT} X_c[k]$

SSY080
160824

Uppg 5

$x_5[n]$; $\sum_{n=0}^{3} x_5[n] = 1$ s.d.g möjliga men endast g kvar

Dessutom

$x_5[n]$ en fördröjd impuls ($x_1[n]$)

Då borde $|DFT\{x_1[n]\}| = |DFT\{x_5[n]\}|$

vilket också stämmer på $X_g[k]$

Svar:

Signal	DFT
$x_1[n]$	$X_d[k]$
$x_2[n]$	$X_a[k]$
$x_3[n]$	$X_f[k]$
$x_4[n]$	$X_c[k]$
$x_5[n]$	$X_g[k]$