Tentamen ssy040/041
Sensorer, Signaler och System, del A, Z2

Examinator: Ants R. Silberberg

25 mars 2008 kl. 14.00-18.00 sal V

Förfrågningar:	Ants Silberberg , tel. 1808
Lösningar:	Anslås onsdagen den 26 mars på institutionens anslagstavla, plan 5.
Resultat:	Anslås tisdagen den 8 april kl. 15 på institutionens anslagstavla, plan 5.
Granskning:	1: Onsdag 9 april kl. 12.15 - 12.45 , rum 5430. 2: Torsdag 10 april kl. 12.15 - 12.45 , rum 5430.
Bedömning:	En korrekt och välmotiverad lösning med ett tydligt angivet svar ger full poäng.

Hjälpmedel

- Typgodkänd miniräknare
- Beta Mathematics Handbook
- Två sidor med egna anteckningar

Betygsgränser (ej slutbetyg)

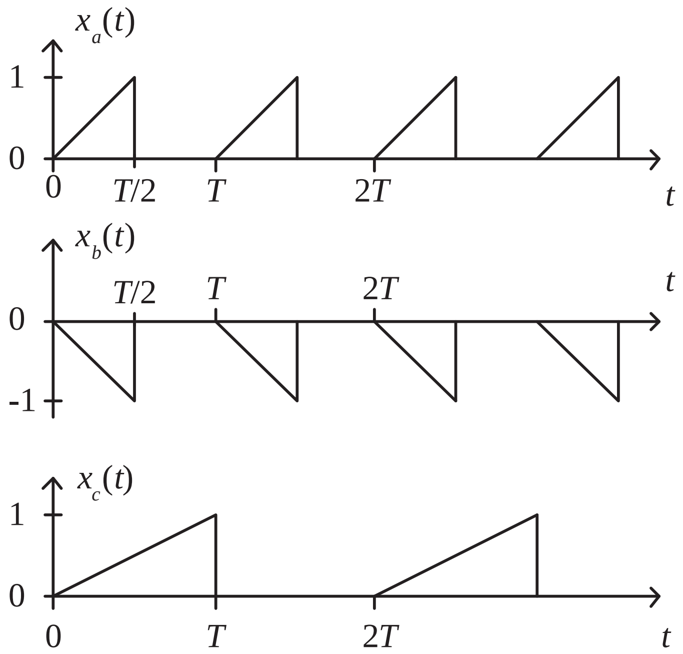
Poäng	0-10	11-15	16-20	21-25
Betyg	U	3	4	5

OBS! Skriv namn och personnummer på varje sida. Lycka till!

1. En kontinuerlig och periodisk signal $x(t)$ kan beskrivas med en Fourierserie enligt

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_o t} \ .$$

Några representativa delar av tre kontinuerliga och periodiska signaler $x_a(t)$, $x_b(t)$ och $x_c(t)$ visas i figur 1 där $T = 1.0$ ms.



Figur 1: Tre periodiska signaler

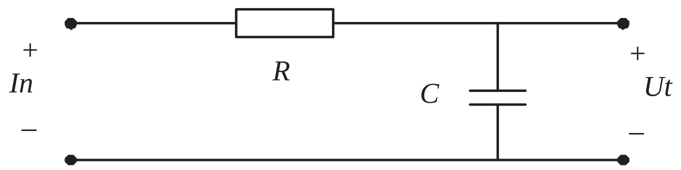
a) Vilken grundvinkelfrekvens ω_o har signal $x_a(t)$? *(1p)*

b) Fourierseriekoefficienterna till signalen $x_a(t)$ tecknas c_{ak}. Beräkna c_{ak} för $k = 0$. *(1p)*

c) Antag att övriga Fourierseriekoefficienter c_{ak} till signalen $x_a(t)$ är kända. Ange värdena på Fourierseriekoefficienterna c_{bk} till signalen $x_b(t)$. *(1p)*

d) Ange värdena på Fourierseriekoefficienterna c_{ck} till signalen $x_c(t)$. *(2p)*

2. Den kontinuerliga signalen $x(t)$ innehåller signaler med frekvenser upp till 100 kHz men ej däröver. De intressanta och informationsbärande delarna i signalen har dock betydligt lägre frekvens. Signalen $x(t)$ skall samplas med en utrustning med den maximala samplingsfrekvensen 60 kHz. För att undvika aliasing vid sampling då samplingsfrekvensen 60 kHz väljs används ett enkelt RC-filter som antialiasingfilter, se figur 2.



Figur 2: Analogt RC-filter

Detta filter har frekvenssvaret

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Resistansen R=2.0 kΩ.

a) Beräkna värdet på kapacitansen C så att RC-filtret får ett frekvenssvar som reducerar utsignalens amplituden till $< 1\%$ av insignalens amplitud vid frekvensen 30 kHz. *(3p)*

b) Brytfrekvensen f_c för ett system (filter) är den frekvens där systemets förstärkning har reducerats med faktorn $\frac{1}{\sqrt{2}}$ från sitt maximala värde H_o.

$$|H(j2\pi f)|_{\{f=f_c\}} = \frac{H_o}{\sqrt{2}}$$

Vilken brytfrekvens f_c får vårt analoga RC-filter? *(2p)*

3. Ett diskret system har impulssvaret

$$h[n] = \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]$$

Beräkna systemets utsignal $y[n]$ för n=-5, 0 ,5 och 10 när insignalen $x[n] = u[n]$. *(5p)*

4. En signal $x(t) = \cos(\omega t + \phi)$ samplas varje millisekund. Första samplet tas då $t = 0$. Vinkelfrekvensen $\omega = 200$ r/s och $\phi = 56°$ eller $\frac{56\pi}{180}$ radianer.

   a) Beräkna värdet på det femte samplet. *(1p)*

   b) Ge ett exempel på en annan kontinuerlig och sinusformad signal $x_b(t) = \cos(\omega_b t + \phi)$ med samma fasvinkel ϕ som efter sampling ger samma sekvens av sampelvärden. Beräkna värdet på det femte samplet. *(2p)*

   c) Ge ett exempel på ytterligare en annan kontinuerlig och sinusformad signal $x_c(t) = \cos(\omega_c t - \phi)$ men med fasvinkeln $-\phi$ som också ger samma sekvens av sampelvärden. Beräkna värdet på det femte samplet. *(2p)*

   Motivera dina svar väl! Samplingsintervallet är lika i alla tre fallen och första samplet tas alltid vid tiden $t = 0$. Värdet på ϕ är också lika i de tre fallen.

5. Den kontinuerliga signalen $x(t)$ har Fouriertransformen

$$X(j\omega) = 4\frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} \quad .$$

Vilken är signalen $x(t)$? *(5p)*

Sensorer, Signaler & System A
080325 SSY041 A

1/ a/ $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \{T = 1{,}0\cdot 10^{-3}\} = \boxed{2\pi\cdot 10^3 \quad r/s}$

c/ $x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{ak} e^{jk\omega_0 t}$

$$x_b(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{bk} e^{jk\omega_0 t} = -x_a(t) = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{ak} e^{jk\omega_0 t} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} -c_{ak} e^{jk\omega_0 t} \qquad \boxed{\text{Svar: } c_{bk} = -c_{ak}}$$

b/ $c_{ak} = \frac{1}{T}\int_0^T x_a(t) e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \{k=0\} = \frac{1}{T}\int_0^T x_a(t)\,dt =$

$$= \frac{1}{T}\int_0^{T/2} t\cdot\frac{2}{T}\,dt = \frac{2}{T^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{T/2} = \frac{2}{T^2}\cdot\frac{T^2}{2\cdot 4} = \boxed{\frac{1}{4}} \text{ ; för } k=0$$

d/ $c_{ak} = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} \frac{2}{T} t e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{2}{T^2}\int_0^{T/2} t e^{-jk\omega_0 t}\,dt$

$$c_{ck} = \frac{1}{2T}\int_0^T \frac{\tau}{T} e^{-jk\omega_0'\tau}\,d\tau = \left\{\begin{array}{l}\tau = 2t \\ t = \tau/2\end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} t & 0 & T/2 \\ \hline \tau & 0 & T\end{array}\right\}$$

$d\tau = 2dt$

$$= \frac{1}{2T}\int_0^{T/2} \frac{2}{T} e^{-jk\omega_0' 2t}\, 2\cdot dt =$$

Svar:

$$= \frac{2}{T^2}\int_0^{T/2} e^{-jk2\omega_0' t}\,dt = \{2\omega_0' = \omega_0\} \Rightarrow \boxed{c_{ck} = c_{ak}}$$

080325
SSY041A

2/

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega RC} = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}} \quad \text{med } \omega_c = \frac{1}{RC}$$

$$H_0 = |H(j\omega)|_{max} = 1 \quad \text{då } \omega \to 0$$

a/ $$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} = 0{,}01 \quad \text{då } \omega = \omega_1 = 2\pi f_1$$

$f_1 = 30$ kHz

$$\frac{1}{1+\left(\frac{\omega_1}{\omega_c}\right)^2} = \frac{1}{100^2}$$

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_c}\right)^2 = 100^2 - 1 \quad ; \quad \omega_c^2 = \frac{\omega_1^2}{100^2-1} = \frac{(2\pi \cdot 30 \cdot 10^3)^2}{100^2-1}$$

$$\frac{1}{RC} = \frac{\omega_1}{\sqrt{100^2-1}} \Rightarrow C = \frac{\sqrt{100^2-1}}{\omega_1 R} = \frac{\sqrt{100^2-1}}{2\pi \cdot 30 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^3}$$

$$\Rightarrow C = 2{,}65 \cdot 10^{-7} = 0{,}27\,\mu F$$

b/ $$|H(j\omega)| = \frac{H_0}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} = \{H_0 = 1\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{då } \omega = \omega_c$$

$$\therefore \omega_c = \frac{1}{RC} = 2\pi f_c \quad ; \quad f_c = \frac{1}{2\pi RC} = \ldots = 300 \text{ Hz}$$

080325
SSY041 A

3/ $$h[n] = \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]$$

$$x[n] = u[n]$$

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, x[n-k] =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k u[k]\, u[n-k] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k$$

Ändlig geom. serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$; $\alpha \neq 1$

$$y[n] = \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{4}}$$

n	$y[n]$	
-5	0	ingen "överlap" i faltn. summan
0	$\frac{1-3/4}{1-3/4} = 1$	
5	$\frac{1-(3/4)^6}{1-3/4} = \frac{1-0{,}75^6}{0{,}25} \approx 3{,}29$	
10	$\frac{1-(3/4)^{11}}{1-3/4} = \frac{1-0{,}75^{11}}{0{,}25} \approx 3{,}83$	

080325
SSY041 A

4. $x(t) = \cos(\omega t + \phi)$

a) Sampling: $x[n] = x(nT) = \cos(\omega n T + \phi) =$

$= \cos(\Omega n + \phi)$, $\Omega = \omega T = 200 \cdot 10^{-3} = 0{,}2$ r
$\phi = 56°$

Sampel tas vid $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$
Femte samplet: $n = 4$
$x[4] = \cos\left(0{,}2 \cdot 4 + \frac{56 \cdot \pi}{180}\right) \approx \cos(1{,}78) \approx \cos(0{,}56\pi) =$

$\approx -0{,}205$

b) $\cos(x) = \cos(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi k n)$, $n, k \in \mathbb{Z}$

$\cos(\Omega n + \phi + 2\pi k n) = \cos((\Omega + 2\pi k)n + \phi) =$

$= \cos(\Omega_b n + \phi)$, $\Omega_b = \Omega + 2\pi k = \omega_b \cdot T$

$\omega_b = \frac{\Omega}{T} + \frac{2\pi}{T} \cdot k = \omega + \omega_s \cdot k$ $\quad \omega_s$: samplings-vinkelfrekv.

$n = 4$ $\cos((\Omega + 2\pi k) \cdot 4 + \phi) = \cos(\Omega \cdot 4 + \phi) = x[4] = -0{,}205$

c) $\cos(x) = \cos(-x)$

$\cos(\Omega n + \phi) = \cos(-\Omega n - \phi) = (-\Omega n + 2\pi k n - \phi) =$

$= \cos((2\pi k - \Omega)n - \phi) = \cos(\Omega_c n - \phi)$

$\Omega_c = 2\pi k - \Omega = \omega_c T \Rightarrow \omega_c = \frac{2\pi}{T} \cdot k - \frac{\Omega}{T} =$

$= \omega_s k - \omega$

$x[4] = \cos((2\pi k - \Omega) \cdot 4 - \phi) = \cos(-4\Omega - \phi) = \cos(4\Omega + \phi) =$
$\approx -0{,}205$

SSY041A
080325

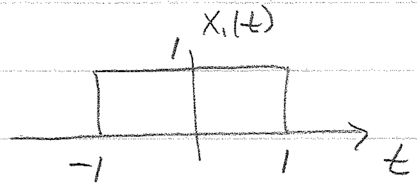
5/ $$X(j\omega) = \frac{4\sin^2\omega}{\omega^2} = \frac{2\sin\omega}{\omega}\cdot\frac{2\sin\omega}{\omega} =$$

$$= X_1(j\omega)\cdot X_1(j\omega) = X_1^2(j\omega)$$

$$x_1(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X_1(j\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2\sin\omega}{\omega}\right\} =$$

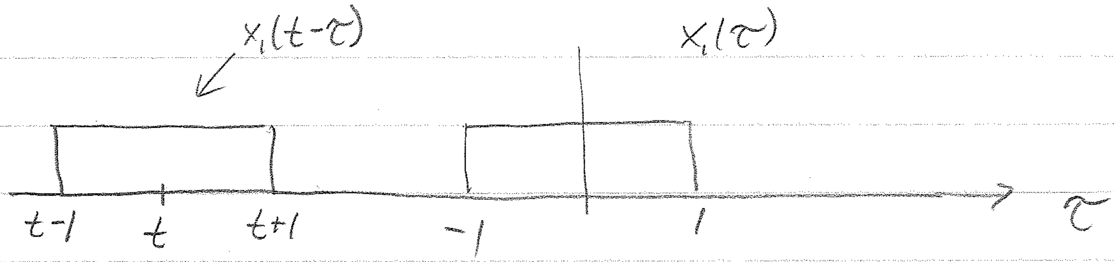
$$= u[t+1] - u[t-1] = \begin{cases} 1, & |t| < 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

Se Beta!



$$x_1(t) * x_1(t) = x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega) = X_1(j\omega)\cdot X_1(j\omega)$$

$$x_1(t) * x_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\, x_1(t-\tau)\, d\tau$$



"Grafisk" faltning enligt figur ovan ger

$$x(t) = \begin{cases} 2-|t| & , t \le 2 \\ 0 & , \text{annars} \end{cases}$$