Tentamen ssy041
Sensorer, Signaler och System, del A, Z2

Examinator: Ants R. Silberberg

19 december 2007 kl. 08.30-12.30 sal M

Förfrågningar:	Ants Silberberg , tel. 1808
Lösningar:	Anslås torsdagen den 20 dec. på institutionens anslagstavla, plan 5.
Resultat:	Anslås fredagen den 11 januari kl. 15 på institutionens anslagstavla, plan 5.
Granskning:	1: Måndag 21 jan. kl. 12.00 - 13.00 , rum 5430. 2: Tisdag 22 jan. kl. 12.00 - 13.00 , rum 5430.
Bedömning:	En korrekt och välmotiverad lösning med ett tydligt angivet svar ger full poäng.

Hjälpmedel

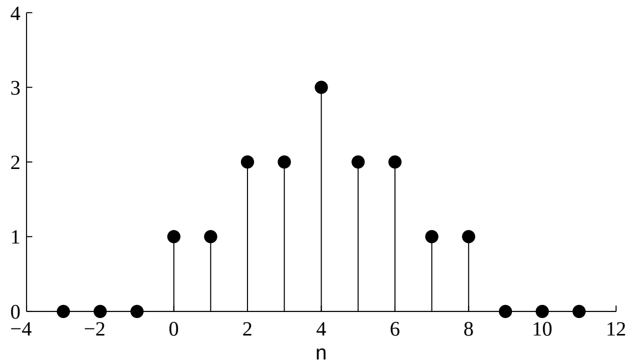
- Typgodkänd miniräknare
- Beta Mathematics Handbook
- Två sidor med egna anteckningar

Betygsgränser (ej slutbetyg)

Poäng	0-10	11-15	16-20	21-25
Betyg	U	3	4	5

OBS! Skriv namn och personnummer på varje sida. Lycka till!

1. a) Två diskreta signaler $x_1[n] = \delta[n] + \delta[n-2] + \delta[n-4]$ och $x_2[n] = u[n] - u[n-N]$ faltas med varandra. Resultatet visas i figur 1. Ange värdet på heltalet N. Motivera ditt svar! *(3p)*



Figur 1: Signalen $x_1[n] * x_2[n]$

b) En signal tecknas som $g(t) = (1+j)e^{j4\pi t} + (1-j)e^{-j4\pi t}$. Beräkna signalens realdel och imaginärdel. *(2p)*

2. Betrakta signalen $x(t) = \sum_{k=1}^{5} \sin(\sqrt{k}\omega_0 t)$.

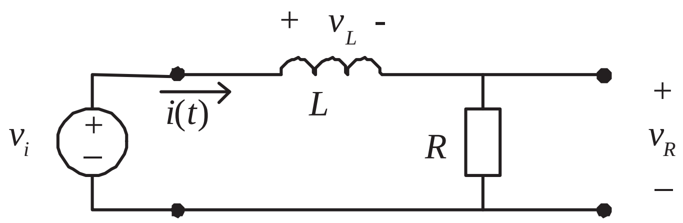
a) Är signalen $x(t)$ periodisk? Ange i så fall den fundamentala perioden. *(2p)*

b) Teckna signalens Fouriertransform. *(1p)*

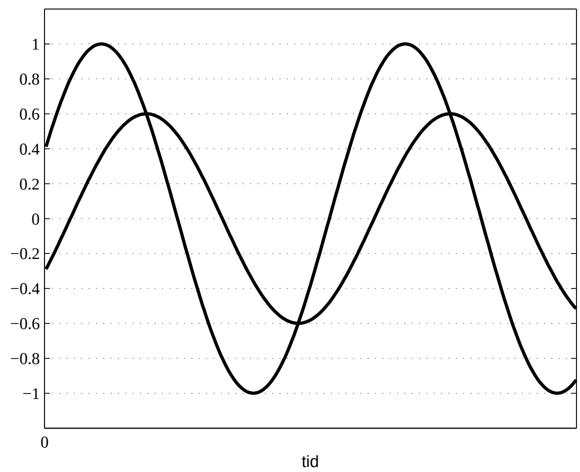
c) Ange de samplingfrekvenser som signalen $x(t)$ kan samplas med utan att informationen i signalen går förlorad (signalen ska kunna återskapas ur sina sampelvärden). *(2p)*

3. Genom ett experiment i mätteckniklabbet önskar man bestämma induktansen L hos en spole. En uppkoppling enligt figur 2 används där den sinusformade inspänningen $v_i(t)$ levereras av en signalgenerator. Med hjälp av ett oscilloskop studeras inspänningen v_i samt spänningen v_R över resistansen. Oscilloskopbilden visas i figur 3. (De två kanalerna har samma förstärkningsinställning samt samma tidssvep.) Beräkna induktansen L. Signalfrekvensen $f = 2000$ Hz och resistansen $R = 100\ \Omega$. Följande kretsekvationer kan användas:

$$v_i(t) = v_L(t) + v_R(t)$$
$$v_R(t) = i(t)R$$
$$v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$



Figur 2: RL-krets



Figur 3: Oscilloskop bild

4. Ett kontinuerligt LTI-system har impulssvaret $h(t) = u(t) - u(t-4)$.

   a) Beräkna systemets utsignal $y(t)$ för insignalen $x(t) = tu(t)$. *(4p)*

   b) Gör en skiss över utsignalen $y(t)$ *(1p)*

5. En del av de signaler vi studerar antas existera för alla tider, t. Antag att vi nu har en signal $x(t)$ som vi endast kan observera under en begränsad tid T, säg mellan tidpunkterna $-T/2$ och $T/2$. Den signal vi då har tillgång till kan ses som den ursprungliga signalen $x(t)$ multiplicerat med observationsfönstret $w(t)$ där

$$w(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0, & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

   Beräkna Fouriertransformen för den observerade signalen $w(t)x(t)$ om $x(t) = \cos(\omega_0 t)$. Gör även en skiss över den observerade signalens Fouriertransform. Antag att $\frac{2\pi}{\omega_0} \ll T$. *(5p)*

Sensorer, Signaler & System Z2, SSY041 A 071219

1. a) $x_1[n] = \delta[n] + \delta[n-2] + \delta[n-4]$

$x_2[n] = u[n] - u[n-N]$

$y[n] = x_1[n] * x_2[n]$

Vi tänker oss att $x_1[n]$ är insignal och $x_2[n]$ impulssvar till ett LTI-system

$y[n] = x_2[n] + x_2[n-2] + x_2[n-4]$

Enligt figur är $n=8$ sitta värdet på $x_2[n-4]$ som är $\neq 0$

$x_2[n-4] = 1$ för $n = 4,5,6,7,8$, annars $= 0$

Alltså måste $x_2[n] = 1$ för $n = 0,1,2,3,4$

Då kan vi skriva $x_2[n] = u[n] - u[n-5]$

Svar: $N=5$

b) $g(t) = (1+j)e^{j4\pi t} + (1-j)e^{-j4\pi t} =$

$= e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t} + j(e^{j4\pi t} - e^{-j4\pi t}) =$

$= 2 \cdot \frac{(e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t})}{2} - 2 \cdot \frac{(e^{j4\pi t} - e^{-j4\pi t})}{2j} =$

$= 2\cos(4\pi t) - 2\sin(4\pi t)$

$\mathrm{Re}\{g(t)\} = 2[\cos(4\pi t) - \sin(4\pi t)]$

$\mathrm{Im}\{g(t)\} = 0$

SSY041 A
071219

2. $x(t) = \sum_{k=1}^{5} \sin(\sqrt{k} \cdot \omega_0 t)$

a) Periodisk ?

Undersök $k=1$ och $k=2$ $\qquad \omega_1 = \omega_0 \quad (k=1)$

$\omega_2 = \sqrt{2}\,\omega_0 \ (k=2)$

$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \; ; \; T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}\,\omega_0}$

Gemensam periodtid $T_{12} = m_1 T_1 = m_2 T_2 \qquad m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$

$\frac{m_1}{m_2} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}\,\omega_0} \cdot \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Inga heltal (m_1 och m_2) uppfyller villkoret

$\Rightarrow$ ej periodisk

b) $\sin(\omega_c t) \xleftrightarrow{FT} \frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-\omega_c) - \delta(\omega+\omega_c)\right]$

och

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega) = \frac{\pi}{j}\{ \delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0) + \\ + \delta(\omega-\sqrt{2}\,\omega_0) - \delta(\omega+\sqrt{2}\,\omega_0) + \\ + \delta(\omega-\sqrt{3}\,\omega_0) - \delta(\omega+\sqrt{3}\,\omega_0) + \\ + \delta(\omega-\sqrt{4}\,\omega_0) - \delta(\omega+\sqrt{4}\,\omega_0) + \\ + \delta(\omega-\sqrt{5}\,\omega_0) - \delta(\omega+\sqrt{5}\,\omega_0)\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{5} \frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-\sqrt{k}\,\omega_0) - \delta(\omega+\sqrt{k}\,\omega_0)\right]$$

c) Signalen $x(t)$'s högsta frekvens $\omega_M = \sqrt{5}\,\omega_0$

Krav på samplingsfrekv. $\omega_s > 2\omega_M = 2\sqrt{5}\,\omega_0$

SSY041 A
071219

3. Diff. ekvation som beskriver sambandet mellan insignal $v_i(t)$ och utsignal $v_R(t)$

$$v_i(t) = L\frac{di(t)}{dt} + v_R(t)$$

$$i(t) = \frac{v_R(t)}{R} \; ; \; \frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dv_R(t)}{dt}$$

$$v_R(t) + \frac{L}{R}\frac{dv_R(t)}{dt} = v_i(t)$$

Fouriertransformera!

$$V_R(j\omega) + j\omega\frac{L}{R}V_R(j\omega) = V_i(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{V_R(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{1}{1+j\omega\frac{L}{R}} = \left\{\omega_0 = \frac{R}{L}\right\} = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

För insignal $v_i(t) = A\cos(\omega_c t)$ blir utsignalen
$v_R(t) = A \cdot |H(j\omega_c)| \cos(\omega_c t + \arg\{H(j\omega_c)\})$

Ur figur fås $A = 1$ $|H(j\omega)| = 0{,}6$ vid $\omega = \omega_c = 2\pi \cdot 2000$ r/s

$$|H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2}} = 0{,}6$$

$$1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2 = \frac{1}{0{,}6^2}$$

$$\left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2 = \frac{1}{0{,}36} - 1 = \frac{1-0{,}36}{0{,}36} = \frac{0{,}64}{0{,}36}$$

$$\frac{\omega_c}{\omega_0} = (\pm)\sqrt{\frac{0{,}64}{0{,}36}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$$

$$\omega_0 = \frac{R}{L}$$

$$\frac{\omega_c \cdot L}{R} = \frac{4}{3}$$

$$L = \frac{4R}{3\omega_c} = \frac{4 \cdot 100}{3 \cdot 2\pi \cdot 2000} = \frac{1}{30\pi}$$

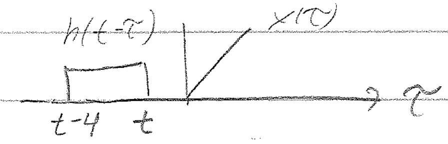
Svar: $L = 10{,}6$ mH

SSY041 A
071219

4. $h(t) = u(t) - u(t-4)$, $x(t) = t\,u(t)$

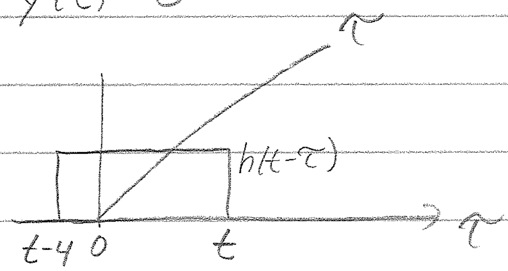
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

i) $t < 0$



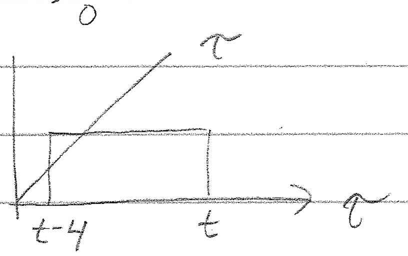
Ingen överlapp : $y(t) = 0$

ii) $0 < t < 4$



$$y(t) = \int_0^t \tau\, d\tau = \left[\frac{\tau^2}{2}\right]_0^t = \frac{1}{2}t^2$$

iii) $t \geq 4$



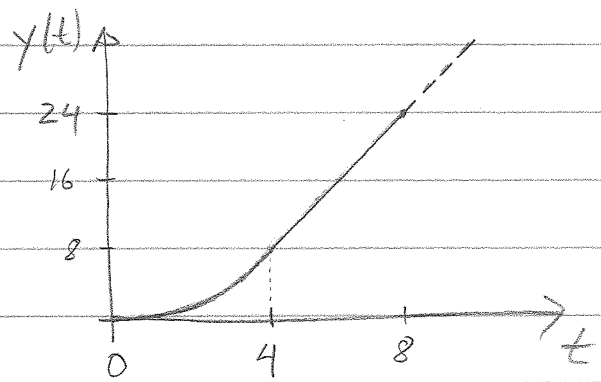
$$y(t) = \int_{t-4}^{t} \tau\, d\tau =$$

$$= \left[\frac{\tau^2}{2}\right]_{t-4}^{t} = \frac{1}{2}\left[t^2 - (t-4)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t^2 - t^2 - 16 + 8t\right) = 4t - 8 =$$

Svar:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}t^2, & 0 \leq t \leq 4 \\ 4t-8, & t \geq 4 \end{cases}$$



SSY041A
071219

5.

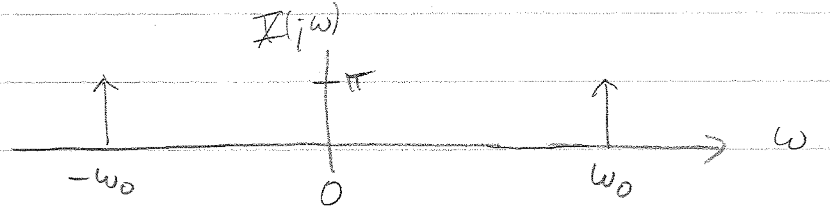
$$w(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{FT} T\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right) = \frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) = W(j\omega)$$

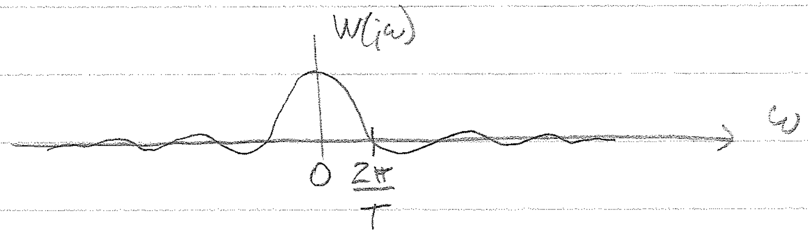
$$x(t) = \cos(\omega_0 t) \xleftrightarrow{FT} \pi\left[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right] = X(j\omega)$$

$$w(t)\cdot x(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{2\pi} W(j\omega) * X(j\omega) =$$

$$= \frac{\pi}{2\pi}\left[W(j(\omega-\omega_0)) + W(j(\omega+\omega_0))\right] =$$

$$= \frac{T}{2}\left[\mathrm{sinc}\left(\frac{(\omega-\omega_0)T}{2}\right) + \mathrm{sinc}\left(\frac{(\omega+\omega_0)T}{2}\right)\right]$$





$\omega_0 \gg \frac{2\pi}{T}$

$$\mathcal{F}T\{w(t)x(t)\} = \frac{1}{2\pi} W(j\omega) * X(j\omega)$$