Reglerteknik

Kurskod: SSY051

Tentamen 2020-10-27

Tid: 14:00-18:00 Zoom-tentamen

Lärare: Bengt Lennartson, tel: 0730-79 42 26

Tentamen omfattar 25 poäng, där betyg tre fordrar 10 poäng, betyg fyra 15 poäng och betyg fem 20 poäng. För betyg 4 och 5 kan kompletterande muntlig examination bli aktuell.

Granskning av rättning sker den 11 och 12 november kl 12:30-13:00 på avdelningen.

- Alla hjälpmedel är tillåtna på tentamen utom samarbete med andra studenter.
- Bodediagram ingår längst bak i tentamenstesen.
- Ladda upp din tentamenslösning i Canvas under Assignment, och endast som ett dokument senast 18:30.

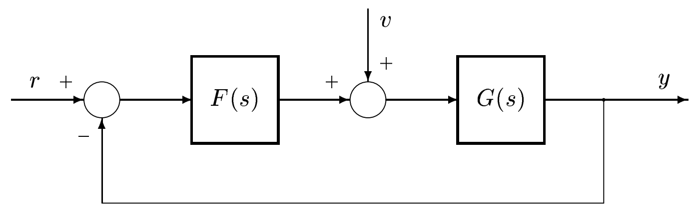
Institutionen för elektroteknik
Avdelningen för system- och reglerteknik
Chalmers tekniska högskola

1

En instabil process med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{s-2}$$

ska regleras med en regulator $F(s)$ enligt följande blockschema för det återkopplade systemet



En student har lärt sig att man kan förkorta bort en pol med motsvarande nollställe och väljer därför regulatorn

$$F(s) = \frac{s-2}{s}$$

a) Bestäm överföringsfunktionen $G_{ry}(s) = Y(s)/R(s)$ och skissera stegsvaret. (1 p)

b) Bestäm överföringsfunktionen $G_{vy}(s) = Y(s)/V(s)$ och skissera stegsvaret. Kommentera det erhållna resultatet med avseende på stabilitet. (2 p)

c) En alternativ och lämpligare reglerstrategi är att välja en styrfunktion $u = -K_p y + K_r r$, där K_p och K_r väljs så att samma överföringsfunktion och därmed stegsvar erhålls från referenssignalen r till utsignalen y som i uppgift a). Bestäm K_p och K_r så att detta resultat erhålls och visa speciellt att kvarstående fel undviks från r till y. (2 p)

d) Bestäm motsvarande stegsvar från laststörningen v ($r = 0$) till utsignalen y för styrfunktionen och parametervärdena som bestämdes i uppgift c), och jämför resultatet med uppgift b). (1 p)

2

Ett fordon med en massa m drivs av en motorkraft F_d som också påverkas av ett vindmotstånd som är proportionellt mot kvadraten på fordonets hastighet y med en proportionalitetskonstant b, d.v.s. vindmotståndet är by^2. Antag dessutom att motorns dynamik från gaspådraget u till drivkraften F_d ges av överföringsfunktionen

$$\frac{F_d(s)}{U(s)} = \frac{K}{1+Ts}$$

a) Formulera en olinjär tillståndsmodell för detta andra ordningens system. (2 p)

b) Linjärisera kring en arbetspunkt där hastigheten $y_0 = 30$ m/s. (2 p)

3

En dubbelintegralprocess

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

ska regleras så att det återkopplade systemet får en önskad stabilitetsmarginal och snabbhet.

a) Dimensionera en PID-regulator

$$F_{PID}(s) = \frac{K_i(1 + s\tau)^2}{s(1 + s\tau/\beta)}$$

så att fasmarginalen blir 45° och överkorsningsfrekvensen $\omega_c = 1$ rad/s, vilket med approximationen $\omega_c t_r \approx 1$ innebär att det återkopplade systemets stegsvar från referenssignal till processens utsignal har en stigtid på c:a 1 sekund. Välj $\beta = 15$. (3 p)

b) Denna deluppgift är något krävande, men den som kan robust stabilitet löser uppgiften på 2-3 rader. En PID$_f$-regulator

$$F_{PID_f}(s) = \frac{K_i(1 + s\tau)^2}{s(1 + 2\zeta_f s\tau/\beta + (s\tau/\beta)^2)}$$

där det första ordningens lågpassfiltret i PID-regulatorn har ersatts med ett andra ordningens lågpassfilter i PID$_f$-regulatorn, får för samma parametrar som i PID-regulatorn och $\zeta_f = 0.5$ approximativt samma fasmarginal och överkorsningsfrekvens. Detta betyder att förmågan att hantera laststörningar ($J_v = 1/K_i$) och stabilitetsmarginalen (fasmarginalen φ_m) är likvärdiga, medan högfrekvensegenskaperna skiljer sig åt.

Utvärdera därför en högfrekvent resonant osäkerhet som multipliceras med den nominella modellen $G(s)$ så att det verkliga systemet representeras av överföringsfunktionen $G_0(s) = G(s)G_r(s)$ där

$$G_r(s) = \frac{1}{1 + 0.02s/\omega_n + (s/\omega_n)^2}$$

Den multiplikativa osäkerheten $\Delta_G(s) = G_r(s) - 1$ har en resonanstopp $\max_\omega |\Delta_G(j\omega)| = 50$, vilken inträffar vid frekvensen ω_n. Vilken är den minsta resonansfrekvens som tolereras innan det återkopplade systemet blir instabilt för PID respektive PID$_f$ regulatorn, enligt det robusta stabilitetskravet

$$|T(j\omega)| < \frac{1}{|\Delta_G(j\omega)|}, \quad \forall\omega$$

där $T(s) = L(s)/(1 + L(s))$ antas kunna approximeras med $L(s)$ vid resonansfrekvensen ω_n, och de båda regulatorerna kan approximeras med respektive regulators högfrekvensasymptot vid ω_n. (2 p).

4

Betrakta överföringsfunktionen

$$Y(s) = \frac{3}{s(s+2)}U(s)$$

a) Bilda en tillståndsmodell med utsignalen y och dess derivata $\dot{y}$ som tillståndsvariabler. (1 p)

b) Bestäm tillståndsåterkopplingsmatrisen L_u och den statiska förstärkningen K_r i styrlagen

$$u = -L_u x + K_r r$$

där r är referenssignalen och x är tillståndsvektorn, så att en önskad polplacering erhålls, representerad av polynomet $(s+\alpha)^2$. (3 p)

c) Bestäm styrsignalens begynnelsevärde $u(0)$ då referenssignalen r ändras som ett enhetssteg. Kommentera nivån på $u(0)$ i förhållande till den önskade polplaceringen. (1 p)

5

En process

$$G(s) = \frac{e^{-sT_d}}{s}$$

ska regleras med en tidsdiskret regulator. Antag att samplingsintervallets längd h är densamma som transportfördröjningen h, d.v.s. $h = T_d$.

a) Bilda en motsvarande tidsdiskret överföringsfunktion då insignalen antas vara styckvis konstant mellan samplingstidpunkterna. (2 p)

b) Bestäm förstärkningen K_p för regulatorn

$$F_d(z) = \frac{K_p z}{z+1}$$

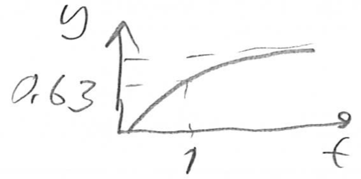
så att det återkopplade systemets båda poler placeras i origo. (2 p)

c) Bestäm processens utsignal $y(kh)$ då referenssignalen $r(kh)$ är stegformad. Kommentera möjligheten att åstadkomma ett motsvarande stegsvar med en tidskontinuerlig reglerfunktion. (1 p)

Lösning till tentamen i Reglerteknik 201027

1. a) $G(s) = \frac{1}{s-2}$ $\quad L(s) = \frac{1}{s}$ $\quad G_{ry}(s) = \frac{L}{1+L} = \frac{1}{s+1}$

$R(s) = \frac{1}{s}$ $\quad Y(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$ $\quad y(t) = 1 - e^{-t}$



b)

$$G_{vy}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)F(s)} = \frac{1}{(s-2)\left(1 + \frac{1}{s-2}\frac{s-2}{s}\right)} =$$

$$= \frac{1}{s-2+(s-2)/s} = \frac{s}{(s-2)(s+1)} \qquad V(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{s}{(s-2)(s+1)}\frac{1}{s} = \frac{1/3}{s-2} - \frac{1/3}{s+1}$$

$$y(t) = \frac{1}{3}(e^{2t} - e^{-t})$$

Instabilt eftersom den instabila polen ej förkortas bort i $G_{vy}(s)$

c) $Y = \frac{1}{s-2}(-K_p Y + K_r R)$

(*) stabilt system eftersom den instabila polen dragits in i VHP

$$(s - 2 + K_p)Y = K_r R \Rightarrow G_{ry}(s) = \frac{K_r}{s-2+K_p}$$

$$= \frac{1}{s+1} = G_{ry} \text{ i uppg a)} \Rightarrow K_p = 3,\ K_r = 1$$

$G_{ry}(0) = 1 \Rightarrow y(t) \to 1$ då $r = \sigma(t)$

d) $Y = \frac{1}{s-2}(-K_p Y + V) \Rightarrow (s - 2 + K_p)Y = V \Rightarrow Y = \frac{1}{s+1}V$

$V(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s+1}\frac{1}{s}$ $\quad y(t) = 1 - e^{-t}$ $\quad$ (*)

2.
$$\begin{cases} m\dot{y} = F_d - by^2 \\ F_d + T\dot{F}_d = Ku \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{F}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{b}{m}y^2 + \frac{1}{m}F_d \\ -\frac{1}{T}F_d + \frac{K}{T}u \end{bmatrix}$$

$$\Delta\dot{y} = -\frac{2b}{m}y_0\Delta y + \frac{1}{m}\Delta F_d \qquad \Delta y = y - y_0$$

$$\Delta F_d = F_d - F_{d0}$$

$$\Delta\dot{F}_d = -\frac{1}{T}\Delta F_d + \frac{K}{T}\Delta u \qquad \Delta u = u - u_0$$

Arbetspunkt $y_0 = 30\,m/s$ $\quad \dot{y}_0 = \dot{F}_{d0} = 0$

$$F_{d0} = b y_0^2 \qquad u_0 = \frac{1}{K}F_{d0} = \frac{b y_0^2}{K}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{y} \\ \Delta\dot{F}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{60b}{m} & \frac{1}{m} \\ 0 & -\frac{1}{T} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta y \\ \Delta F_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{T} \end{bmatrix}\Delta u$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta y \\ \Delta F_d \end{bmatrix}$$

3. a) $G(s) = \frac{1}{s^2}$ $\quad \angle G(j\omega) = -180°$ $\quad |G(j\omega_c)| = \frac{1}{\omega_c^2} = 1$

eftersom $\omega_c = 1$ rad/s

$$\angle F_{PID}(j\omega_c) = \angle G(j\omega_c) + \varphi_m - 180° = 180° + 45° - 180°$$

Enligt formelblad kurvskaror PID $= 45°$

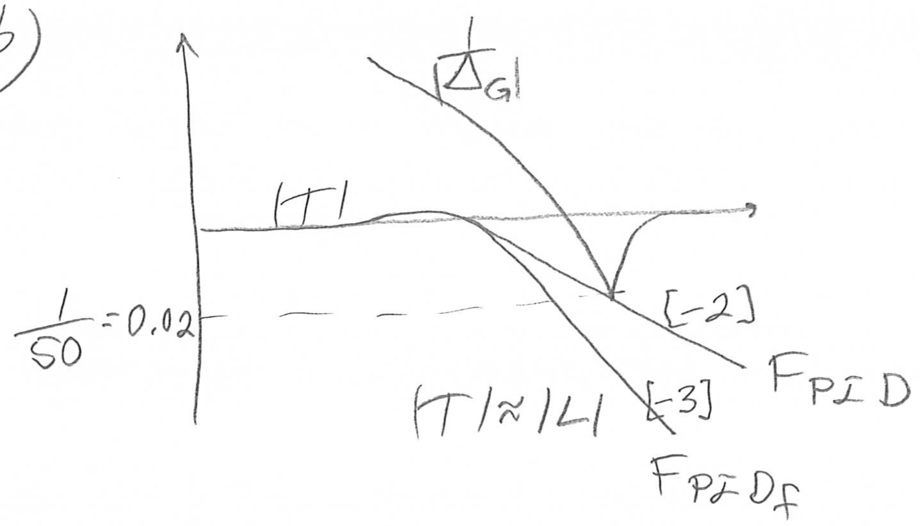
$\omega_c\tau = 3.5$ för $\beta = 15$ o $\angle F_{PID} = 45° \Rightarrow \tau = 3.5$

$K_\infty|G(j\omega_c)| = 4.1$ $\quad$ = — " —

$\Rightarrow K_\infty = 4.1$

$$K_i = \frac{K_\infty}{\tau\beta} = 0.078 \qquad F_{PID}(s) = \frac{0.078(1+3.5s)^2}{s(1+3.5s/15)}$$

3b)



$T = \frac{L}{1+L} \approx L$ för höga frekvenser

PID $\quad |L| = |G||F_{PID}| = \frac{K_\infty}{\omega^2}$ för stora ω

Robust stabilitet:

$$|T| \approx |L| < \frac{1}{|\Delta_G|} = \frac{1}{50} \text{ vid } \omega = \omega_n$$

Krav vid $\omega = \omega_n$ (resonansfrekvensen)

$$|G||F_{PID}| = \frac{K_\infty}{\omega_n^2} < \frac{1}{50} \Rightarrow \omega_n > \sqrt{50 K_\infty} = $$

$$= 14.3 \text{ rad/s}$$

PID$_f$ $\quad F_{PID_f}(s) = \frac{K_i (s\tau)^2}{s(s\tau/\beta)^2} = \frac{K_i \beta^2}{s}$ för stora s

Robust stabilitet:

$$|T| \approx |L| < \frac{1}{|\Delta_G|} = \frac{1}{50} \text{ vid } \omega = \omega_n$$

Krav vid $\omega = \omega_n$

$$|G||F_{PID_f}| = \frac{K_i \beta^2}{\omega_n^2 \omega_n} < \frac{1}{50}$$

$$\Rightarrow \omega_n > (50 K_i \beta^2)^{1/3} = 9.6 \text{ rad/s}$$

4. a) $\dot{y} = v$

$\dot{v} + 2v = 3u$

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}}_{B} u$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}$$

b) $u = -\underbrace{[l_1 \ \ l_2]}_{L_u} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} + K_r r$

$$\det(sI_n - A + BL_u) = \det\left(\underbrace{\begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}}_{sI_n - A} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{[l_1 \ \ l_2]}_{L_u} \right)$$

$$= \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3l_1 & s+2+3l_2 \end{bmatrix} = s^2 + (2+3l_2)s + 3l_1$$

$$= (s+\alpha)^2 = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 \Rightarrow \begin{cases} l_1 = \dfrac{\alpha^2}{3} \\ l_2 = \dfrac{2\alpha - 2}{3} \end{cases}$$

$$G_{ry}(s) = C(sI_n - A + BL_u)^{-1} BK_r =$$

$$= \frac{[1 \quad 0] \begin{bmatrix} s+2+3l_2 & 1 \\ -3l_1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3K_r \end{bmatrix}}{s^2 + (2+3l_2)s + 3l_1} =$$

$$= \frac{[1 \quad 0] \begin{bmatrix} 3K_r \\ 3K_r s \end{bmatrix}}{\cdots} = \frac{3K_r}{s^2 + (2+3l_2)s + 3l_1}$$

$$G_{ry}(0) = 1 \Rightarrow 3K_r = 3l_1 \Rightarrow K_r = l_1 = \frac{\alpha^2}{3}$$

c) $G_{ru}(s) = -L_u(sI_n - A + BL_u)^{-1} BK_r + K_r$

$$u(0) = \lim_{s \to \infty} s\, G_{ru}(s) \overset{R(s)}{\frac{1}{s}} = G_{ru}(\infty) = K_r = \frac{\alpha^2}{3}$$

$\therefore$ $u(0)$ växer kvadriskt med α, dvs dubbelpolens avstånd från origo.

5. a) $G(s) = \dfrac{e^{-sh}}{s}$ $\qquad G_d(z) = \dfrac{h z^{-1}}{z-1} = \dfrac{h}{z(z-1)}$

b) $L_d(z) = G_d(z) F_d(z) = \dfrac{h K_p z}{z(z-1)(z+1)} = \dfrac{h K_p}{\underbrace{(z-1)(z+1)}_{z^2-1}}$

$$G_{ryd}(z) = \frac{L_d(z)}{1+L_d(z)} = \frac{hK_p}{z^2-1+hK_p} = \frac{1}{z^2}$$

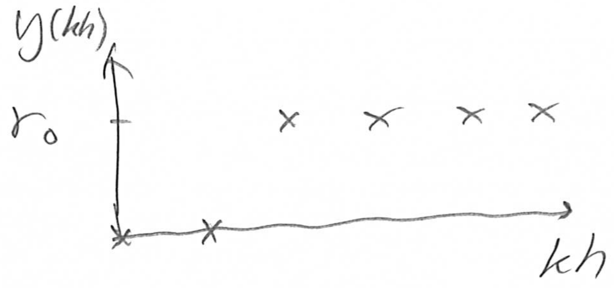
då $K_p = \dfrac{1}{h}$

c) $Y(z) = G_{ryd}(z) R(z)$

$z^2 Y(z) = R(z)$

$y(kh+2h) = r(kh)$ $\qquad r(kh) = r_0 \quad k \geq 0$

$y(0) = y(h) = 0$ $\qquad y(kh) = r_0 \quad k \geq 2$



Perfekt reglering efter två samplingsintervall.

Ett sådant stegsvar går ej att åstadkomma mha ett kontinuerligt reglersystem, men uppenbarligen mha en tidsdiskret reglerfunktion.