# Reglerteknik E/Z

## Kurskod: ESS017, SSY051

# Tentamen 2017-10-27

Tid: 8:30-12:30 Lokal: M-huset

Lärare: Bengt Lennartson, tel: 3722

Tentamen omfattar 25 poäng, där betyg tre fordrar 10 poäng, betyg fyra 15 poäng och betyg fem 20 poäng.

Granskning av rättning sker den 13 och 14 november kl 12:30-13:00 på avdelningen.

Tillåtna hjälpmedel:

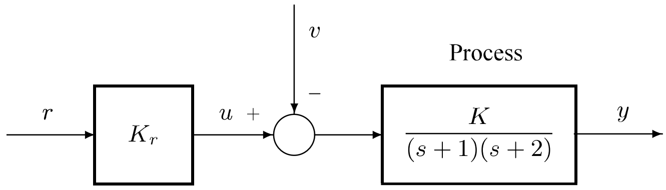
- Bodediagram (ingår längst bak i tentamenstesen).
- Matematiska och fysikaliska tabeller, t ex Beta och Physics handbook.
- Valfri kalkylator med tömt minne.
- **OBS! Tidigare formelsamling i reglerteknik är ej tillåten, endast de formelblad som ingår i tentamenstesen**.

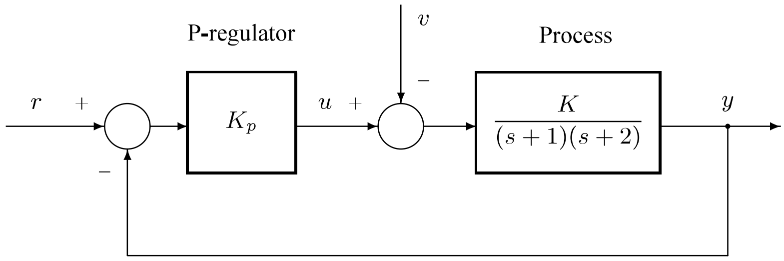
Lycka till!

Institutionen för elektroteknik
Avdelningen för system- och reglerteknik
Chalmers tekniska högskola

**1**

Jämför nedanstående öppna styrning med motsvaramde återkopplade system, då processen är av andra ordningen med två reella poler och en processförstärkning $K$.




a) Bestäm förstärkningen $K_r$ vid öppen styrning så att $y(t) \to r$ då $t \to \infty$, då referenssignalen $r(t)$ är ett enhetssteg och $v = 0$. Antag att processförstärkningen $K = 4$.

(1 p)

b) Antag nu att processförstärkningen $K$ avviker från det nominella värdet $K = 4$. Bestäm därför, för ett godtyckligt värde på $K$, utsignalens slutvärde $\lim_{t\to\infty} y(t)$ vid öppen styrning med $K_r$ enligt uppgift a) och återkoppling för en godtycklig förstärkning $K_p$, då referenssignalen $r(t)$ är ett enhetssteg och $v = 0$. Notera skillnaden mellan öppen styrning och återkoppling, speciellt då $K_p$ är hög.

(1 p)

c) Antag att en stegformad laststörning $v(t)$ med amplituden ett subtraheras från styrsignalen $u(t)$. Bestäm det kvarstående felet orsakat av denna störning vid öppen styrning och återkoppling för en godtycklig förstärkning $K_p$ och processförstärkning $K$. Välj $r = 0$. Notera skillnaden mellan öppen styrning och återkoppling, speciellt då $K_p$ är hög.

(1 p)

d) Stabilitetsproblem uppstår i återkopplingsfallet vid högre förstärkning $K_p$. Bestäm därför dämpningen $\zeta$ för det återkopplade systemets nämnarpolynom då $K_p = 223$ och $K = 1$. Vad händer med dämpningen då $K_p \to \infty$. Jämför med fallet öppen styrning.

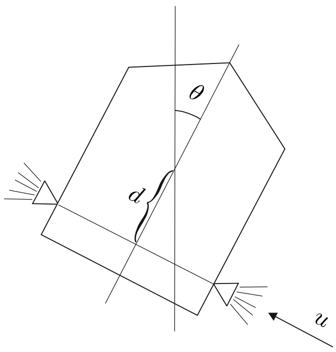
(1 p)

e) Vilka slutsatser kan vi dra angående fördelar och nackdelar med återkoppling respektive öppen styrning för varierande processförstärkning $K$.

(1 p)

**2**

Satelliten nedan roterar med en vinkelhastighet $\omega$ som är tidsderivatan av vinkelpositionen $\theta$. Gasflödena ger en kraft $u$ på avståndet $d$ från tyngdpunkten vilket ger ett drivande moment $du$. Det återkopplade systemets uppgift är att styra vinkeln $\theta$ till önskat läge.




Momentjämvikt ger differentialekvationen

$$\dot{\omega} = \frac{d}{J} u$$

där $J$ är satellitens tröghetsmoment. Antag i fortsättningen att $J = 2$ och $d = 3$. Satelliten återkopplas med följande styrlag

$$u = K_p(\theta_r - \theta) - K_d \omega$$

där $\theta_r$ är referenssignalen. Uppgiften är att bestämma regulatorns förstärkningskonstanter $K_p$ och $K_d$.

a) Rita ett blockschema som beskriver det återkopplade reglersystemet, och bestäm överföringsfunktionen från referenssignalen $\theta_r$ till utsignalen $\theta$. Välj regulatorparametrarna $K_p$ och $K_d$ så att det återkopplade systemets poler hamnar i en dubbelpol i $s = -\alpha$.

(2 p)

b) Bestäm utsignalen $\theta(t)$, samt bestäm styrsignalens begynnelsevärde $u(0)$ för $\alpha = 1$ och $3$, då referenssignalen $\theta_r$ är ett enhetssteg. Notera speciellt slutvärdet för vinkeln $\theta$. Hur påverkas systemets snabbhet av polernas placering, dvs värdet på $\alpha$? Vilken motsättning råder mellan önskad snabbhet och styrsignalaktivitet.

(3 p)

c) Visa att det kvarstående felet blir noll vid referenssignalsteg. Förklara orsaken till detta resultat.

(1 p)

**3**

En I-regulator $F(s) = K_i/s$ ska dimensioneras för en dödtidsprocess med transportfördröjningen $T_d$ och en tidskonstant $T$. Vid dimensioneringen approximeras dödtidsprocessen med en första ordningens Padé-approximation, vilket ger processmodellen

$$G(s) = \frac{1 - sT_d/2}{(1 + sT)(1 + sT_d/2)}$$

Antag att $T = 1$ och $T_d = 1$.

a) Rita ett Bodediagram för processmodellen $G(s)$ inklusive beloppsasymptoter.
(2 p)

b) Välj förstärkningen $K_i$ så att fasmarginalen för denna approximativa modell blir $\varphi_m = 50°$.
(1 p)

c) Ersätt Padé-approximationen med en exakt dödtidsmodell, och bestäm den verkliga fasmarginalen samt kommentera Padé-approximationens noggrannhet för den aktuella dödtiden.
(2 p)

**4**

En process med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{K}{(1 + Ts)(1 + 2\zeta_p s/\omega_n + (s/\omega_n)^2)}$$

där $K = 1$, $T = 0.5$, $\zeta_p = 1$ och $\omega_n = 1$ ska regleras med en PID-regulator

$$F_{PID}(s) = K_i \frac{1 + 2\zeta s\tau + (s\tau)^2}{s(1 + s\tau/\beta)}$$

Välj fasmarginalen $\varphi_m = 50°$, $\zeta = 1$ (dubbelnollställe) samt $\beta = 6$.

a) Valet av överkorsningsfrekvens $\omega_c$ är inte självklart. Dimensionera därför två PID-regulatorer. Välj dels $\omega_c = 1.3$ rad/sek, vilket ger den största integralförstärkningen $K_i$, och jämför med $\omega_c = 1.6$ rad/sek. Det senare valet motsvarar en vanlig tumregel som säger att $\omega_c = \sqrt{\beta}/\tau$, som är mittfrekvensen för PD-delen $(1 + s\tau)/(1 + s\tau/\beta)$ då $\zeta = 1$.
(4 p)

b) Kommentera skillnaderna i förmågan att kompensera lågfrekventa laststörningar och känsligheten för högfrekventa mätstörningar i styrsignalen genom att studera och jämföra kriterierna $J_v = 1/K_i$ och $J_u = F(\infty)$ för de båda regulatorerna.
(1 p)

**5**

En process med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{Ke^{-sT_d}}{1 + Ts}$$

ska regleras med en tidsdiskret PI-regulator

$$F_d(z) = K_p\left(1 + \frac{h/T_i\, z^{-1}}{1 - z^{-1}}\right)$$

Antag att $T_d = h = 0.2T$.

a) Bestäm en tidsdiskret modell $G_d(z)$ för den tidskontinuerliga överföringsfunktionen $G(s)$.

(2 p)

b) Dimensionera PI-regulatorn $F_d(z)$ så att regulatorns nollställe kancellerar processens tidsdiskreta pol kopplad till tidskonstanten $T$. Placera det återkopplade systemets två återstående poler som en dubbelpol i $z = \alpha$ för en godtycklig processförstärkning $K$. Ange de resulterande regulatorparametrarna $K_p$ och $T_i$ som funktion av $K$, samt den resulterande polplaceringen d.v.s. värdet på $\alpha$.

(2 p)

Lösning till tentamen i Reglerteknik 2017-10-27

BL 17/027

1. a) $G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)}$ $\quad G(0) = \frac{K}{2}$

$G_{ry}(0) = K_r G(0) = \frac{K_r K}{2} = 1 \Rightarrow K_r = \frac{2}{K} = \frac{2}{4} = 0{,}5$

b) Öppen styrning: $y(\infty) = G_{ry}(0) = \frac{0{,}5K}{2} = 0{,}25K$

Återkoppling: $y(\infty) = G_{ry}(0) = \frac{K_p G(0)}{1+K_p G(0)} =$

$= \frac{1}{1+\frac{2}{K_p K}} \rightarrow 1$ då $K_p \rightarrow \infty$

c) Öppen styrning: $y(\infty) = -G(0) = -\frac{K}{2}$

Återkoppling: $y(\infty) = -\frac{G(0)}{1+K_p G(0)} = -\frac{1}{\frac{2}{K}+K_p} \rightarrow 0$ då $K_p \rightarrow \infty$

d) Återkoppling: $G_{ry}(s) = \frac{K_p G(s)}{1+K_p G(s)} =$

$= \frac{K_p K}{s^2+3s+2+K_p K} = \begin{pmatrix} K_p = 223 \\ K = 1 \end{pmatrix} = \frac{223}{s^2+3s+225} =$

$= \frac{223}{s^2 + \underbrace{2 \cdot 15}_{\omega_n} \cdot \underbrace{0{,}1}_{\zeta} s + \underbrace{15^2}_{\omega_n^2}} \quad \therefore \quad \omega_n = 15, \ \zeta = 0.1$

$K_p \rightarrow \infty \Rightarrow \zeta \rightarrow 0$

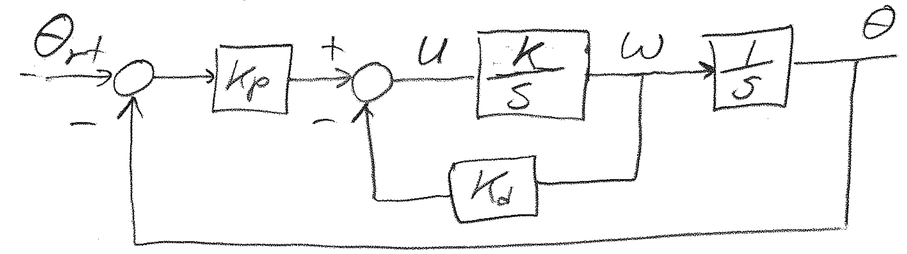
Öppen styrning ger inga stabilitetsproblem

e) Återkoppling ger små kvarstående fel vid referenssignaländringar och liten påverkan av laststörningar vid hög förstärkning, men däremot stabilitetsproblem (låg dämpning) vid hög förstärkning.

Öppen styrning ger inga stabilitetsproblem men kvarstående fel vid referenssignalsteg och ingen kompensering av laststörningar.

2. $s\,\Omega(s) = \frac{2}{3} U(s)$

a)




$K = \frac{2}{3}$

$$\Theta(s) = \frac{K}{s^2} U(s) \qquad U(s) = K_p(\Theta_r(s) - \Theta(s)) - K_d s\,\Theta(s)$$

$$s^2\Theta(s) = K\left(K_p\Theta_r(s) - (K_p + sK_d)\Theta(s)\right)$$

$$\underbrace{(s^2 + KK_d s + KK_p)}_{(s+\alpha)^2 = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2}\Theta(s) = KK_p\Theta_r(s)$$

$$\Rightarrow \quad K_p = \frac{\alpha^2}{K} \quad K_d = \frac{2\alpha}{K}$$

$$G_{\theta_r\theta}(s) = \frac{\alpha^2}{(s+\alpha)^2}$$

$\Theta_r = \sigma(t)$

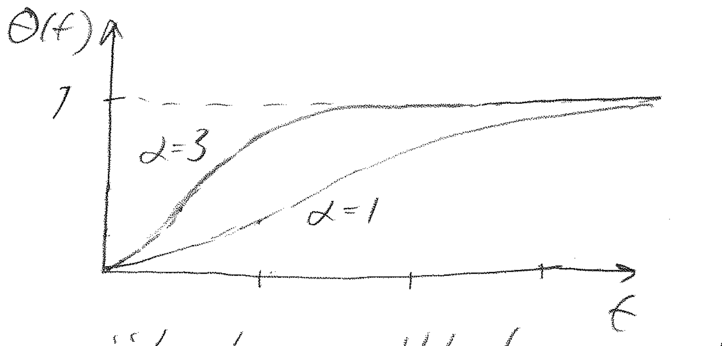
b) $$\Theta(s) = G_{\theta_r\theta}(s)\,\Theta_r(s) = \frac{\alpha^2}{(s+\alpha)^2 s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+\alpha} + \frac{C}{(s+\alpha)^2}$$

$$= \frac{As^2 + A2\alpha s + A\alpha^2 + Bs^2 + B\alpha s + Cs}{(s+\alpha)^2 s}$$

$A + B = 0 \qquad 2\alpha A + B\alpha + C = 0 \qquad A\alpha^2 = \alpha^2$

$A = 1 \quad B = -1 \quad C = -2\alpha + \alpha = -\alpha$

$$\theta(t) = 1 - e^{-\alpha t} - \alpha t e^{-\alpha t} = 1 - (1 + \alpha t)e^{-\alpha t}$$




$\theta(\infty) = 1$

$\theta(0) = \omega(0) = 0 \Rightarrow$

$$u(0) = K_p = \frac{\alpha^2}{K} = \begin{cases} 1.5 & \alpha = 1 \\ 13.5 & \alpha = 3 \end{cases}$$

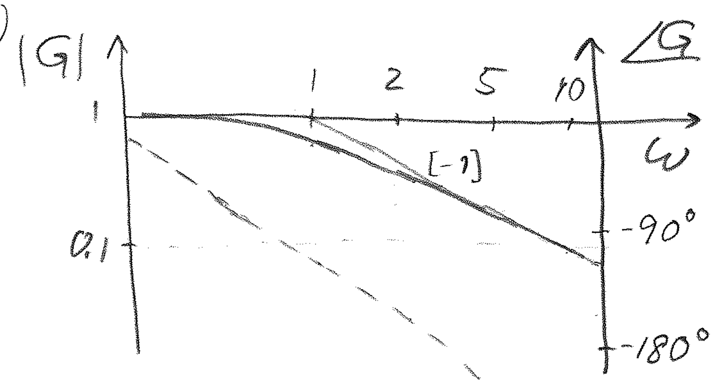
ökad snabbhet (ökat α) kräver en kvadratisk ökning av styrsignalaktiviteten ($u(0)$)

c) $\Theta_r = 1$ och $\theta(\infty) = 1 \Rightarrow \Theta_r - \Theta(\infty) = 1 - 1 = 0$

Orsak: Integralverkan ingår i kretsöverföringen.

3. $G(s) = \dfrac{1 - s/2}{(1+s)(1+s/2)}$

a)




$|G| = \dfrac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$

$\angle G = -\arctan\omega - 2\arctan\dfrac{\omega}{2}$

b) $L(j\omega) = \dfrac{K_i(1 - j\omega/2)}{j\omega(1+j\omega)(1+j\omega/2)}$

$|L(j\omega)| = \dfrac{K_i}{\omega\sqrt{1+\omega^2}}$ $\quad \angle L(j\omega) = -90° - \arctan\omega - 2\arctan\dfrac{\omega}{2}$

$\angle L(j\omega_c) = -180° + \varphi_m = -130° \Rightarrow \omega_c = 0.36$

$|L(j\omega_c)| = \dfrac{K_i}{\omega_c\sqrt{1+\omega_c^2}} = \dfrac{K_i}{0.36\sqrt{1+0.36^2}} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{K_i = 0.38}}$

c) $L(j\omega) = \dfrac{K_i e^{-j\omega}}{j\omega(1+j\omega)}$ $\quad \angle L(j\omega) = -90° - \arctan\omega - \omega\dfrac{180°}{\pi}$

$|L(j\omega_c)| = \dfrac{0.38}{\omega_c\sqrt{1+\omega_c^2}} = 1 \Rightarrow \omega_c = 0.36$

$\angle L(j0.36) = -90° - \arctan 0.36 - 0.36\dfrac{180°}{\pi} = -130°$

Skillnaden i fasvridning är $\approx 0.2°$ dvs Padé approximationen fungerar utmärkt i detta exempel, eftersom fasvridningen och därmed fasmarginalen blir densamma dvs $\varphi_m = 50°$ både för den verkliga dödtiden och Padé approximationen.

4. a) $G(s) = \dfrac{1}{(1+0.5s)(1+2s+s^2)} = \dfrac{1}{(1+0.5s)(1+s)^2}$

$F_{PID}(s) = \dfrac{K_i(1+2\zeta s\tau + (s\tau)^2)}{s(1+s\tau/\beta)}$ $\boxed{\begin{matrix}\zeta = 1\\ \beta = 6\end{matrix}}$

$|G(j\omega_c)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+0.25\omega_c^2}\,(1+\omega_c^2)} = \begin{cases} 0.3117 & \omega_c = 1.3 \\ 0.2194 & \omega_c = 1.6 \end{cases}$

$\underline{\angle G(j\omega_c)} = -\arctan 0.5\omega_c - 2\arctan \omega_c = \begin{cases} -137.9^\circ & \omega_c = 1.3 \\ -154.7^\circ & \omega_c = 1.6 \end{cases}$

$\underline{\angle F_{PID}(j\omega_c)} = \varphi_m - 180^\circ - \underline{\angle G(j\omega_c)} = \begin{cases} -130^\circ + 137.9^\circ \\ -130^\circ + 154.7^\circ \end{cases} = \begin{cases} 7.9^\circ & \omega_c = 1.3 \\ 24.7^\circ & \omega_c = 1.6 \end{cases}$

Enligt FS s 30

$\omega_c \tau = \begin{cases} 1.5 & \angle F_{PID} = 7.9^\circ \\ 2.6 & \angle F_{PID} = 24.7^\circ \end{cases} \Rightarrow \boxed{\tau = \begin{cases} 1.15 & \omega_c = 1.3 \\ 1.63 & \omega_c = 1.6 \end{cases}}$

$K_\infty |G(j\omega_c)| = \begin{cases} 2.9 & \angle F_{PID} = 7.9^\circ \\ 2.2 & \angle F_{PID} = 24.7^\circ \end{cases} \Rightarrow K_\infty = \begin{cases} 9.30 & \omega_c = 1.3 \\ 10.03 & \omega_c = 1.6 \end{cases}$

$\boxed{K_i = \dfrac{K_\infty}{\tau\beta} = \begin{cases} 1.35 & \omega_c = 1.3 \\ 1.03 & \omega_c = 1.6 \end{cases}}$

b) $J_v = \dfrac{1}{K_i} = \begin{cases} 0.741 & \omega_c = 1.3 \\ 0.971 & \omega_c = 1.6 \end{cases}$ $\quad \dfrac{0.741}{0.971} = 0.76$

$\therefore$ 24% lägre $J_v$ vid $\omega_c = 1.3$

$J_u = K_\infty = \begin{cases} 9.3 & \omega_c = 1.3 \\ 10.03 & \omega_c = 1.6 \end{cases}$ $\quad \dfrac{9.3}{10.03} \approx 0.93$

$\therefore$ 7% lägre $J_u$ vid $\omega_c = 1.3$

slutsats: $\omega_c = 1.3$ ger framförallt bättre kompensering av laststörningar och

något mindre känslighet för mätstörningar i styrsignalen (mindre styrsignalaktivitet)

5. $G(s) = \dfrac{K e^{-sT_d}}{1+Ts}$ $\quad T_d = h = 0{,}2T$

a) $G_d(z) = \dfrac{K(1-a)}{z-a} z^{-1} = \dfrac{K(1-a)z^{-2}}{1-az^{-1}}$ $\quad a = e^{-h/T} = e^{-0.2} = 0.82$

$$G_d(z) = \frac{0{,}18 K z^{-2}}{1-0{,}82 z^{-1}} = \frac{0.18K}{z(z-0.82)}$$

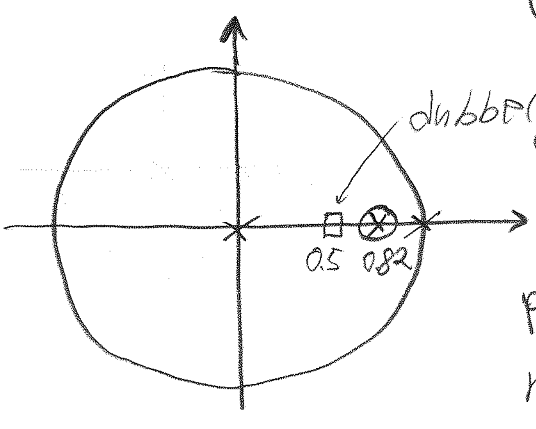
b) $F_d(z) = K_p \dfrac{1 - z^{-1} + h/T_i\, z^{-1}}{1-z^{-1}} = K_p \dfrac{z-(1-h/T_i)}{z-1}$

$$1 - h/T_i = 0.82 \Rightarrow \frac{h}{T_i} = 0.18 \Rightarrow T_i = \frac{h}{0.18}$$

$$L_d(z) = G_d(z) F_d(z) = \frac{0.18K \cdot K_p (z-0.82)}{z(z-0.82)(z-1)} = \frac{0.18 K K_p}{z(z-1)}$$

$$G_{ry_d}(z) = \frac{L_d(z)}{1+L_d(z)} = \frac{0.18KK_p}{\underbrace{z^2 - z + 0.18KK_p}_{(z-\alpha)^2 = z^2 - 2\alpha z + \alpha^2}}$$

$$\begin{cases} 2\alpha = 1 \\ \alpha^2 = 0.18KK_p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0{,}5 \\ K_p = \dfrac{\alpha^2}{0.18K} = \dfrac{1}{0.72K} \end{cases}$$




dubbelpol för återkopplade systemet i $z = 0.5$

processpoler i $z = 0, 0.82$
regulatorpol i $z = 1$
regulator nollställe i $z = 0{,}82$
återkopplade systemet dubbelpol i $z = 0.5$