

# Reglerteknik Z

Kurskod: SSY051

## Tentamen 2016-10-25

Tid: 14:00-18:00,

Lokal: M-huset

Lärare: Bengt Lennartson, tel: 3722

Tentamen omfattar 25 poäng, där betyg tre fordrar 10 poäng, betyg fyra 15 poäng och betyg fem 20 poäng.

Granskning av rättning sker den 10 och 11 november kl 12:30-13:00 på avdelningen.

Tillåtna hjälpmedel:

- Bodediagram (ingår längst bak i tentamenstesen).
- Matematiska och fysikaliska tabeller, t ex Beta och Physics handbook.
- Valfri kalkylator med tömt minne.
- **OBS! Tidigare formelsamling i reglerteknik är ej tillåten, endast de formelblad som ingår i tentamenstesen.**

Lycka till!

Institutionen för signaler och system  
Avdelningen för system- och reglerteknik  
Chalmers tekniska högskola



## 1

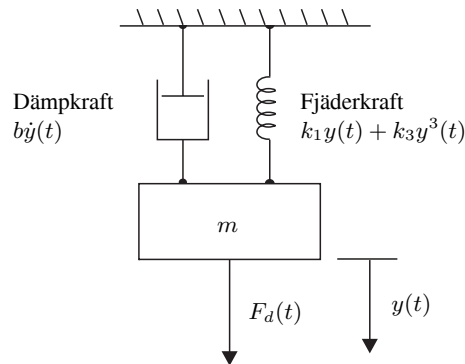
Betrakta ett system med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{K e^{-sT_d}}{(1 + sT)^2}$$

där  $T = 2$ . En oscillerande insignal till detta system  $u(t) = \sin t/2$  resulterar i en utsignal  $y(t) = 3 \sin(t/2 - 3\pi/4)$ . Bestäm överföringsfunktionens förstärkning  $K$  och transportfördröjning  $T_d$ .

(3 p)

## 2



En massa med vikten  $m$  och positionen  $y(t)$  drivs enligt figuren av en drivande kraft  $F_d(t)$ . Via den progressiva fjädern utsätts massan också för den olinjära fjäderkraften  $k_1y(t) + k_3y^3(t)$  och dämpkraften  $b\dot{y}(t)$ .

Den drivande kraften  $F_d(t)$  genereras via en hydraulisk motor med överföringsfunktionen

$$F_d(s) = \frac{K_m}{1 + s} U(s)$$

Motorns uppgift är att positionera massan  $m$  vid positionen  $y = y_0$ .

- a) Formulera en olinjär tillståndsmodell som beskriver fjäder-massasystemets rörelse inklusive den hydrauliska motorn, med  $u(t)$  som insignal och massans position  $y(t)$  som utsignal.

(2 p)

- b) Bestäm en linjär tillståndsmodell som beskriver avvikelser kring den önskade positionen  $y = y_0$ . Var hamnar det öppna icke-reglerade systemets poler?

(3 p)

2

3

En servomotor med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{s(1+s)}$$

ska regleras med en PID-regulator

$$F_{PID}(s) = K_i \frac{1 + 2\zeta s\tau + (s\tau)^2}{s(1 + s\tau/\beta)}$$

med fasmarginalen  $\varphi_m = 45^\circ$  och  $\omega_c = 1.5$  rad/s.

1. Dimensionera tre PID-regulatorer för  $\zeta = 1$  samt  $\beta = 4, 8$  och  $15$ . (2 p)
2. Kommentera skillnaderna i förmågan att kompensera lågfrekventa laststörningar och känsligheten för högfrekventa mätstörningar i styrsignalen genom att studera kriterierna  $J_v = 1/K_i$  och  $J_u = F_{PID}(\infty)$  för de tre regulatorerna. Vilken av regulatorerna ger den bästa kompromissen mellan önskade låg- och högfrekvenssegenskaper? (2 p)

4

En andra ordningens process med dödtid

$$G(s) = \frac{e^{-sT_d}}{(1+2s)(1+s)}$$

ska regleras med en PI-regulator

$$F_{PI}(s) = Kp \left( 1 + \frac{1}{sT_i} \right)$$

1. Dimensionera PI-regulatorn så att det återkopplade systemet får en dubbelpol då dödtiden försummas, dvs då  $T_d = 0$ . (2 p)
2. Antag nu att dödtiden inte är försumbar men ändå så kort att den kan ersättas med ett icke-minfasnollstället  $1 - sT_d$ . För vilka värden på  $T_d$  garanteras då att det återkopplade systemet blir stabilt enligt kriteriet

$$|T(j\omega)| \leq 1/|\Delta_G(j\omega)| \quad \forall \omega$$

när den komplementära känslighetsfunktionen  $T(s)$  bestäms utifrån uppgift a) med nominell dödtid  $T_d = 0$ . (3 p)

**5**

En ren dödtidsprocess

$$y(t) = u(t - T_d)$$

ska regleras med en tidsdiskret P-regulator med förstärkningen  $K_p$ . Antag att samplingsintervallet  $h$  är en multipel  $n$  av dödtiden  $T_d$ , d.v.s.  $T_d = nh$ . Formulera en tidsdiskret modell för denna dödtidsprocess, och bestäm med hjälp Nyquists generella stabilitetskriterium för vilka värden på förstärkningen  $K_p$  som det återkopplade systemet är stabilt.

(4 p)

**6**

a) Formulera en tillståndsmodell för följande satellitmodell

$$\ddot{\theta} = u$$

där  $\theta$  är vinkeln,  $\omega = \dot{\theta}$  är vinkelhastigheten och  $u$  är styrsignalen. Visa att systemet är observerbart från vinkeln  $\theta$ , men ej observerbart då endast vinkelhastigheten  $\omega$  mäts.

(2 p)

b) Konstruera en observatör med dubbelpol i  $s = -\alpha$  då endast signalen  $\theta$  mäts. Bestäm överföringsfunktionen från  $\theta$  till  $\hat{\omega}$ , samt skissera motsvarande amplituddiagram då  $\alpha = 10$ . Kommentera det erhållna filtrets karakteristika i förhållande till systemdynamiken.

(2 p)

# Lösning till tentamen i Reglerteknik 2

2016-10-25

BL161101

1.  $G(s) = \frac{K e^{-sT_d}}{(1+2s)^2}$   $|G(0.5j)| = 3$

$\angle G(0.5j) = -3\pi/4 = -135^\circ$

$|G(j\omega)| = \frac{K}{1+4\omega^2}$   $|G(0.5j)| = K/2 = 3 \Rightarrow K=6$

$\angle G(j\omega) = -\omega T_d \cdot 180^\circ/\pi - 2 \arctan 2\omega$

$\angle G(0.5j) = -90^\circ T_d/\pi - 2 \cdot 45^\circ = -135^\circ$

$T_d = \frac{\pi}{90^\circ} \cdot (135^\circ - 90^\circ) = \frac{\pi}{2}$

2. a)  $m\ddot{y} + b\dot{y} + k_1 y + k_3 y^3 = F_d$

$\dot{y} = v$

$F_d + \dot{F}_d = K_m u$

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{v} \\ \dot{F}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ -\frac{k_1}{m} y - \frac{k_3}{m} y^3 - \frac{b}{m} v + \frac{1}{m} F_d \\ -F_d + K_m u \end{bmatrix}$$

b) Arbetspunkt  $(y_0, u_0) \Rightarrow v_0 = \dot{v}_0 = \dot{F}_d = 0$

$k_1 y_0 + k_3 y_0^3 = F_{d0} = K_m u_0 \Rightarrow u_0 = \frac{1}{K_m} (k_1 y_0 + k_3 y_0^3)$

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{y} \\ \dot{v} \\ \Delta \dot{F}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{m} \underbrace{(k_1 + 3k_3 y_0^2)}_{k_0} & -\frac{b}{m} & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y \\ v \\ \Delta F_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K_m \end{bmatrix} \Delta u$$

$\Delta y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y \\ v \\ \Delta F_d \end{bmatrix}$

$$\det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ \frac{k_0}{m} & s + \frac{b}{m} & -\frac{1}{m} \\ 0 & 0 & s+1 \end{bmatrix} = (s+1) \left( s \left( s + \frac{b}{m} \right) + \frac{k_0}{m} \right) = (s+1) \left( s^2 + \frac{b}{m} s + \frac{k_0}{m} \right)$$

$$s = \begin{cases} -1 \\ -\frac{b}{2m} \pm j \sqrt{\frac{k_0}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \end{cases} \quad \text{då } \frac{k_0}{m} > \left(\frac{b}{2m}\right)^2$$

3. a)  $G(j\omega_c) = \frac{1}{j\omega_c(1+j\omega_c)}$   $|G(j\omega_c)| = \frac{1}{\omega_c \sqrt{1+\omega_c^2}} = 0.370$  för  $\omega_c = 1.5$

$\angle G(j\omega_c) = -90^\circ - \arctan \omega_c = -146.3^\circ$  för  $\omega_c = 1.5$

$\angle F_{PZD}(j\omega_c) = \phi_m - 180^\circ - \angle G(j\omega_c) = 45^\circ - 180^\circ + 146.3^\circ = 11.3^\circ$

$\beta$	$\omega_c T$	$T$	$K_{00}  G(j\omega_c) $	$K_{00} = K_i \beta T$	$K_i$
4	2.7	1.4	1.8	4.9	0.88
8	1.5	1.0	3.8	10.3	1.29
15	1.35	0.9	7.2	19.5	1.44

b)

$\beta$	$J_0$	$J_u$
4	1.736	4.9
8	0.775	10.3
15	0.694	19.5

Ökad styrsignalaktivitet  
 $J_u$  ger bättre kompensering  
av laststörningar  
(lägre  $J_0$ )

$\beta = 8$  ger 37% lägre  $J_0$  och  
fördubblat  $J_u$

$\beta = 15$  ger 39% lägre  $J_0$  jämfört  
med  $\beta = 4$  men fyrdubbling av  $J_u$

Bästa kompromissen är därför  $\beta = 8$   
eftersom  $J_0$ -förbättringen är marginell  
jämfört med den ökade styrsignalaktiviteten.

$$4. a) \quad G(s) = \frac{1}{(1+2s)(1+s)} \quad F_{PI}(s) = \frac{K_i(1+sT_i)}{s}$$

$$K_i = K_p / T_i$$

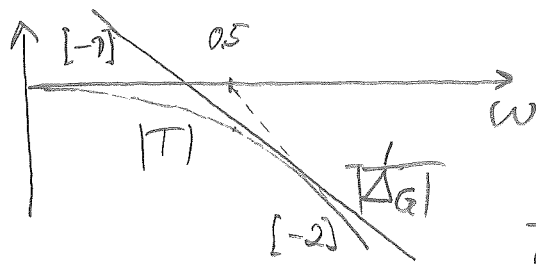
$$\text{Välj } T_i = 2 \Rightarrow L(s) = G(s)F_{PI}(s) = \frac{K_i}{s(1+s)}$$

$$G_{ry}(s) = T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{K_i}{s^2 + s + K_i} = \frac{K_i}{(s+\alpha)^2}$$

$$= \frac{K_i}{s^2 + 2\alpha s + \alpha^2} \quad \begin{cases} 2\alpha = 1 \\ \alpha^2 = K_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0.5 \\ K_i = 0.25 \end{cases}$$

$$b) \quad G_0(s) = \frac{1 - T_d s}{(1+2s)(1+s)} \quad \Delta_G(s) = \frac{G_0(s) - G(s)}{G(s)} = \frac{G_0(s)}{G(s)} - 1 = 1 - T_d s - 1 = -T_d s$$

$$T(s) = \frac{0.25}{(s+0.5)^2} = \frac{1}{(1+s/0.5)^2} \quad |T(j\omega)| = \frac{1}{1+(\omega/0.5)^2}$$



$$\frac{1}{|\Delta_G(j\omega)|} = \frac{1/T_d}{\omega}$$

$$\frac{0.25}{\omega^2 + 0.25} = \frac{1}{\omega T_d} \quad \text{stabilitetsgräns}$$

$\omega^2 - 0.25\omega T_d + 0.25 = 0$  Endast en tangenspunkt fås för ett dubbelpolställe

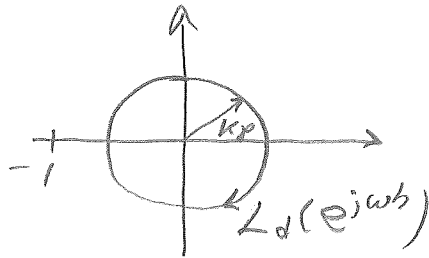
$$(\omega - \alpha)^2 = \omega^2 - 2\alpha\omega + \alpha^2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0.5 \\ 2\alpha = 0.25 T_d \end{cases} \Rightarrow T_d = 4$$

$T_d < 4 \Rightarrow$  icke reella nollställen dvs

$1/|\Delta_G|$ -kurvan skär inte  $|T|$ -kurvan och därmed uppfylls stabilitetsvillkoret för  $0 \leq T_d < 4$ .

5.  $G(s) = e^{-sT_d}$   $T_d = nh \Rightarrow G_d(z) = z^{-n}$   
 $G_d(e^{j\omega h}) = (e^{j\omega h})^{-n} = e^{-j\omega nh} = e^{-j\omega T_d} = G(j\omega)$

$L_d(z) = K_p z^{-n}$   $L_d(e^{j\omega h}) = K_p e^{-j\omega T_d}$



Omslingning kring punkten  $(-1, 0)$  undvikas då  $|K_p| < 1$

Då gäller att  $z = N + P = 0 + 0 = 0$ , dvs inga nollställen i HHP för  $1 + L_d(e^{j\omega h})$ , dvs stabilt återkopplat system för  $|K_p| < 1$ .

6. a)  $\dot{\theta} = \omega$   $\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$

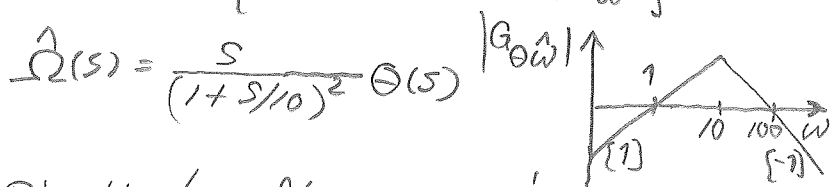
$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C_\theta} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix}$   $y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C_\omega} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix}$

$\det \begin{bmatrix} C_\theta \\ C_\theta A \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$   $\det \begin{bmatrix} C_\omega \\ C_\omega A \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$

$\therefore C_\theta \Rightarrow$  observerbart system,  $C_\omega \Rightarrow$  icke observerbart system

b)  $\det(sI_n - A + K_y C_\theta) = \det \left( \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_\theta \\ k_\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \det \begin{bmatrix} s+k_\theta & -1 \\ k_\omega & s \end{bmatrix}$   
 $= s^2 + k_\theta s + k_\omega = (s+\alpha)^2 = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 \Rightarrow \begin{cases} k_\omega = \alpha^2 = 100 \\ k_\theta = 2\alpha = 20 \end{cases}$

$\begin{bmatrix} \hat{\theta}(s) \\ -\hat{\Omega}(s) \end{bmatrix} = (sI_n - A + K_y C_\theta)^{-1} K_y \Theta(s) =$   
 $= \begin{bmatrix} s+20 & -1 \\ 100 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} k_\theta \\ k_\omega \end{bmatrix} \Theta(s) = \frac{\begin{bmatrix} s & 1 \\ -100 & s+20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 100 \end{bmatrix}}{(s+10)^2} \Theta(s) = \frac{\begin{bmatrix} 20s+100 \\ 100s \end{bmatrix}}{(s+10)^2} \Theta(s)$



Derivering ( $\hat{\omega} = \dot{\theta}$ )  
 upp till  $\omega = 10$  rad/s. För  
 högre frekvenser  
 lågpass filterering. \*

\* Rimligt eftersom  $\omega = \dot{\theta}$