Lösning tentamen Reglerteknik Z 140821

1. a) $Y(s) = \frac{1-Ts}{(1+s)^2}\frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{1+s} + \frac{C}{(1+s)^2} =$

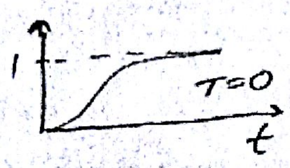
$$= \frac{A+2As+As^2+Bs+Bs^2+Cs}{s(1+s)^2} = \frac{A+(2A+B+C)s+(A+B)s^2}{s(1+s)^2}$$

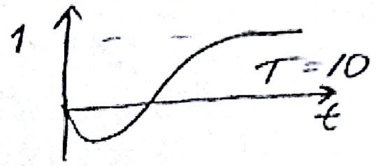
$A=1,\ B=-1,\ 2A+B+C=-T \Rightarrow C=-(1+T)$

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{1+s} - \frac{1+T}{(1+s)^2}\right\} = \left(1-e^{-t}-(1+T)te^{-t}\right)1(t)$

Nollstället $s = \frac{1}{T}$

b)





c) $\min y(t) \to -\infty$ då $T \to \infty$ $\left(\frac{1}{T} \to 0\right)$
eftersom termen $-T te^{-t}$ dominerar
till att börja med för stora T

2. a) KE $1 + \frac{K_pK(s+1)}{(s-1)(s+2)} = \frac{s^2+s-2+K_pKs+K_pK}{s^2+s-2} = 0$

$s^2+(K_pK+1)s+K_pK-2$ stabilitet
kräver $K_pK+1>0,\ K_pK-2>0 \Rightarrow$
$K_p > \frac{2}{K}$ då $K>0$ $\quad K_p < -\frac{2}{|K|}$ då $K<0$

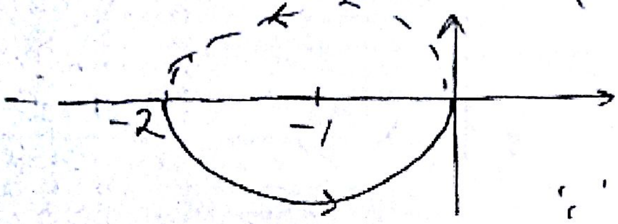
b) Antag i fortsättningen $K>0$ och välj
$K_p = \frac{4}{K}$. Låt verkligt $K_0 = \alpha K$
Marginellt stabilt då $K_pK_0 - 2 = 0$
dvs $\frac{4}{K}\alpha K - 2 = 4\alpha - 2 = 0 \Rightarrow \alpha = 0.5$
$\therefore$ $K_p = \frac{4}{K}$ leder till en amplitudmarginal
$A_m = 0.5$, dvs förstärkningen kan
minska med en faktor $\alpha = 0.5$
innan det återkopplade systemet
blir instabilt.

c) $L(s) = K_p G(s) = \frac{4}{K}\frac{K(s+1)}{(s-1)(s+2)} = \frac{4(s+1)}{(s-1)(s+2)}$

$$L(j\omega) = \frac{4(j\omega+1)(-j\omega-1)(2-j\omega)}{(j\omega-1)(j\omega+2)(-j\omega-1)(2-j\omega)} =$$

$$= \frac{-8(1+2j\omega-\omega^2)+4(j\omega-2\omega^2-j\omega^3)}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)} =$$

$$= -\frac{8}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)} - j\frac{4\omega(3+\omega^2)}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)}$$



$N = -1$

$Z = N + P = -1 + 1 = 0$

∴ Inga rötter till KE i HHP, dvs stabilt återkopplat system.

3) a) $L(s) = G(s)F(s) = e^{-s}\frac{K_i}{s}$ $\quad L(j\omega) = e^{-j\omega}\frac{K_i}{j\omega}$

$\angle L(j\omega_\pi) = -\omega_\pi \frac{180°}{\pi} - 90° = -180°$

$\Rightarrow \quad \omega_\pi = \pi/2$

$|L(j\omega_\pi)| = \frac{K_i}{\omega_\pi} = \frac{2K_i}{\pi} = \frac{1}{A_m} = \frac{1}{3} \Rightarrow K_i = \frac{\pi}{6} = 0.524$

b) $L(s) = e^{-s}K_i\frac{1+T_i s}{s}$ $\quad L(j\omega) = e^{-j\omega}\frac{K_i(1+j\omega T_i)}{j\omega}$

$\angle L(j\omega_\pi) = -\omega_\pi\frac{180°}{\pi} - 90° + \arctan \omega_\pi T_i = -180°$

$T_i = \frac{1}{2}\tan(-90° + 360°/\pi) = 0.229$

$|L(j\omega_\pi)| = \frac{K_i\sqrt{1+(\omega_\pi T_i)^2}}{\omega_\pi} = K_i\frac{\sqrt{1+(2\cdot 0.229)^2}}{2} = \frac{1}{A_m} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow K_i = 0.606$

c) $J_0^I = \frac{1}{0.524} = 1.908$ $\quad J_0^{PI} = \frac{1}{0.606} = 1.650$

$J_0^{PI}/J_0^I = 0.865$ ∴ PI-reg. är cirka 13% effektivare eftersom den ger ett positivt fastillskott vilket tillåter högre K_i

4. a) $\dot{x} = -ax + bu \qquad u = -lx + K_r r$

$y = x$

$\dot{x} = -\underbrace{(a+bl)}_{\alpha}x + bK_r r \Rightarrow l = \frac{\alpha - a}{b}$

Statisk förstärkning $= 1$ från

$r \to y = x \Rightarrow (\dot{x}=0) \quad x = \underbrace{\left(\frac{bK_r}{\alpha}\right)}_{=1} r \Rightarrow K_r = \frac{\alpha}{b}$

b)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 \\ 0 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Eftersom de två delsystemen är helt separerande ges styrlagen av

$u_i = -l_i x_i + K_r r$ där enligt a)

$l_i = \frac{\alpha_i - a_i}{b_i}$

c)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_r \\ K_r \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$G_{ry}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \left(\frac{b_1 K_r}{s+\alpha_1} + \frac{b_2 K_r}{s+\alpha_2} \right)$$

$$G_{ry}(0) = 1 \Rightarrow \left(\frac{b_1}{\alpha_1} + \frac{b_2}{\alpha_2} \right) K_r = 1$$

$$\therefore K_r = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{b_1 \alpha_2 + b_2 \alpha_1}$$

5. Beräkna $G_d = c2d(G, h)$; $gainG = sigma(G_d)$

$F_{di} = c2d(F_i, h)$ $i = 1, \ldots, n$

$S_{di} = 1/(1+G_d * F_{di})$ $i = 1, \ldots, n$

$G_{oydi} = G_d * S_{di}$ $i = 1, \ldots, n$

$G_{wudi} = F_{di} * S_{di}$ $i = 1, \ldots, n$

$gainS_{di} = sigma(S_{di})$ — " —

$M_{si} = max(gainS_{di})$ — " —

$[gainG_{oydi}, w] = sigma(G_{oydi})$ — " —

$Jomaxi = max(gainG_{oydi} ./w)$ "

$gainG_{wudi} = sigma(G_{wudi})$ — " —

$Jumaxi = max(gainG_{wudi})$ — " —

Välj för de regulatorer F_i som uppfyller

$M_{si} <= 1.7$ och

$Jumaxi <= 10/gainG(1)$

↑ LF förstärkning

välj den regulator F_i som ger minsta $Jomaxi$