Reglerteknik Z / Kf

Kurskod: SSY 051

Tentamen 2012-05-23

Tid: 8:30-12:30, Lokal: M-huset

Lärare: Bengt Lennartson, tel: 772 3722

Tentamen omfattar 25 poäng, där betyg tre fordrar 10 poäng, betyg fyra 15 poäng och betyg fem 20 poäng.

Tentamensresultat anslås senast den *7 juni* på avdelningens anslagstavla i ED-huset våning 5. *Granskning* av rättning sker den *7 och 8 juni* kl 12:30-13:00 på avdelningen.

Tillåtna hjälpmedel:

- Bodediagram (ingår längst bak i tentamenstesen).
- Matematiska och fysikaliska tabeller, t ex Beta och Physics handbook.
- Valfri kalkylator med tömt minne.
- **OBS! Tidigare formelsamling i reglerteknik är ej tillåten, endast de formelblad som ingår i tentamenstesen**.

Lycka till!

Institutionen för signaler och system
Avdelningen för reglerteknik, automation och mekatronik
Chalmers tekniska högskola

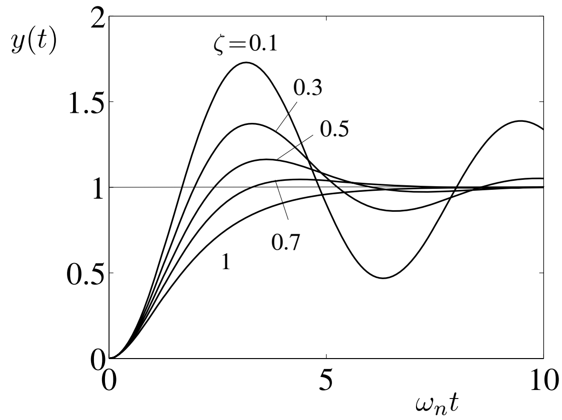
1

Relationen mellan insignalen och utsignalen för en process anges av överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{1+s}$$

a) Dimensionera två alternativa I-regulatorer för detta system så att det återkopplade systemet får en dämpning $\zeta = 0.5$ och 0.7, samt uppskatta stigtiden t_r och maximala relativa översvängen M för det återkopplade systemet för de två fallen med hjälp av följande referensstegsvar.

(2 p)



b) Bestäm överkorsningsfrekvensen ω_c och fasmarginalen φ_m för kretsöverföringen $L(s)$ för de båda regulatorerna.

(2 p)

c) Baserat på ovanstående resultat, ange i en enkel mening samt ett enkelt matematiskt uttryck vilket approximativt samband som råder mellan

- stigtiden t_r och överkorsningsfrekvensen ω_c.
- maximala översvängen M och fasmarginalen φ_m.

(2 p)

2

En farthållare för ett fordon ska utvecklas.

a) Formulera en tillståndsmodell för ett fordon där den drivande kraften från motorn är insignalen u, och där fordonets hastighet v och position p är tillståndsvariabler. Antag ett kvadratiskt vindmotstånd med en proportionalitetsfaktor b. Linjärisera denna tillståndsmodell kring en hastighet v_0, och välj följande två utsignalrelationer

1. endast positionen p mäts.
2. endast hastigheten v mäts.

(3 p)

b) Analyseras observerbarheten för de två fallen i uppgift a) och föreslå lämplig åtgärd för det fall att tillståndsmodellen inte är observerbar.

(2 p)

3

Ett roterande system med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{3}{s^2}$$

från drivande moment till vinkeln θ ska regleras. Dimensionera en PD-regulator för denna process.

a) Bestäm PD-regulatorn för en godtycklig överkorsningsfrekvens ω_c och en önskad fasmarginal $\varphi_m = 45°$.

(3 p)

b) Ange med vilken faktor som styrsignalens känslighet för högfrekventa mätstörningar ökar då ω_c fördubblas.

(1 p)

4

Samma roterande system som i uppgift 3 ska nu i stället regleras med tillståndsåterkoppling, där det antas att både vinkeln θ och vinkelhastigheten ω återkopplas.

a) Bestäm en tillståndsåterkoppling

$$u = -\ell_\theta \theta - \ell_\omega \omega + K_r r$$

så att det återkopplade systemets poler hamnar i en dubbelpol i $s = -\alpha$.

(2 p)

b) Bestäm kretsöverföringen $L(s)$ och den komplementära känslighetsfunktionens högfrekvensasymptot.

(2 p)

c) Jämför denna högfrekvensasymptot med motsvarande asymptot vid PD-reglering i föregående uppgift och kommentera de erhållna regulatorernas känslighet för högfrekventa icke-modellerade resonanser.

(1 p)

5

En tidsdiskret dödtidsprocess ska regleras med en P-regulator, där samplingsintervallet h väljs så att det motsvarar dödtidens längd.

a) Välj P-regulatorns förstärkning så att amplitdmarginalen blir lika med 2.5, d.v.s. så att en ökning av förstärkningen med denna faktor leder till ett marginellt stabilt system.

(3 p)

b) Bestäm kretsöverföringen $L_d(e^{j\omega h})$ och den maximala känslighetsfunktionen

$$M_S = \max_{\omega} S_d(e^{j\omega h}) = \max_{\omega} \frac{1}{1 + L_d(e^{j\omega h})}$$

(2 p)

Lösning till tentamen i Reglerteknik Z/Kf 120523

BL 120524

1. a) $F(s) = \dfrac{K_i}{s}$ $\quad L(s) = \dfrac{K_i}{s(s+1)}$

$$G_{ry}(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{K_i}{s^2+s+K_i} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$\omega_n^2 = K_i,\ 2\zeta\omega_n = 1 \Rightarrow K_i = \frac{1}{4\zeta^2} = \begin{cases} 1 & \zeta = 0.5 \\ 0.51 & \zeta = 0.7 \end{cases}$$

$$t_r = t_{y=0.9} - t_{y=0.1} = \begin{cases} 1.6 & \zeta = 0.5 \\ 3.0 & \zeta = 0.7 \end{cases}$$

$$M = \frac{y_{max} - y(\infty)}{y(\infty)} = \begin{cases} 1.16 & \zeta = 0.5 \\ 1.05 & \zeta = 0.7 \end{cases}$$

b) $$|L(j\omega_c)| = \frac{K_i}{\omega_c\sqrt{1+\omega_c^2}} = 1$$

$$\omega_c^2(1+\omega_c^2) = K_i^2 = \frac{1}{16\zeta^4}$$

$$\omega_c^4 + \omega_c^2 - \frac{1}{16\zeta^4} = 0 \Rightarrow \omega_c = \sqrt{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{16\zeta^4}}}$$

$$\underline{\angle L(j\omega_c)} = -90^\circ - \arctan\omega_c = -180^\circ + \varphi_m$$

$$\varphi_m = 90^\circ - \arctan\omega_c$$

ζ	K_i	ω_n	t_r	ω_c	M	φ_m	$\varphi_m \cdot M$	$t_r\omega_c$
0.5	1	1	1.6	0.79	1.16	52°	60	1.26
0.7	0.51	0.71	3.0	0.46	1.05	65°	68	1.39

c) Ökad översläng M ger minskad fasmarginal, approximativt $\varphi_m \approx M/65$

Minskad stigtid t_r ger ökat ω_c approximativt $t_r \approx 1.3/\omega_c$

2. a) $m\dot{v} = -bv^2 + u$ $\quad$ $\begin{bmatrix}\dot{v}\\ \dot{p}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{b}{m}v^2 + \frac{1}{m}u\\ v\end{bmatrix}$

$\dot{p} = v$

Arbetspunkt $v = v_0 \Rightarrow \dot{v}_0 = 0,\ \dot{p}_0 = v_0$

$u_0 = bv_0^2$

Linjärisering kring $v = v_0 \Rightarrow$

$$\Delta\dot{v} = \dot{v} - \dot{v}_0 = -\frac{2b}{m}v_0\Delta v + \frac{1}{m}\Delta u$$

$$\Delta\dot{p} = \dot{p} - \dot{p}_0 = \Delta v$$

$$\begin{bmatrix}\Delta\dot{v}\\ \Delta\dot{p}\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}-\frac{2b}{m}v_0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}\Delta v\\ \Delta p\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}\frac{1}{m}\\ 0\end{bmatrix}}_{B}\Delta u$$

1) $\Delta y = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}}_{C}\begin{bmatrix}\Delta v\\ \Delta p\end{bmatrix}$ $\quad$ 2) $\Delta y = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}}_{C}\begin{bmatrix}\Delta v\\ \Delta p\end{bmatrix}$

Notera att $p = \Delta p + v_0 t$ eftersom arbetspunkten inte är en jämvikt punkt medan $v = \Delta v + v_0$

b) 1) $\mathcal{O} = \begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ $\quad$ $\det \mathcal{O} = -1 \neq 0$

$\therefore$ observerbart

2) $\mathcal{O} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ -\frac{2b}{m}v_0 & 0\end{bmatrix}$ $\quad$ $\det \mathcal{O} = 0$

$\therefore$ icke observerbart

Då endast hastigheten mäts är inte positionen observerbar. Observerbar tillståndsmodell erhålls då endast Δv ingår som tillståndsvariabel.

3. a) $G(s) = \dfrac{3}{s^2}$ $\quad F_{PD}(s) = K_p \dfrac{1+s\tau_d}{1+s\tau_d/b}$

$|G(j\omega_c)| = 3/\omega_c^2$ $\quad \angle G(j\omega_c) = -180°$

Max faslyft vid önskad $\omega_c \Rightarrow$

$\omega_c = \sqrt{b}/\tau_d$ $\quad \varphi_{max} = -180° + \varphi_m - \angle G(j\omega_c)$

$= -180° + \varphi_m - (-180°) = \varphi_m = 45°$

$$b = \frac{1+\sin 45°}{1-\sin 45°} = \frac{1+1/\sqrt{2}}{1-1/\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = 5.82$$

$\tau_d = \sqrt{b}/\omega_c = 2.41/\omega_c$

$$\sqrt{b}\, K_p |G(j\omega_c)| = 1 \Rightarrow K_p = \frac{1}{3/\omega_c^2 \cdot 2.41} = \frac{\omega_c^2}{7.23}$$

$$F_{PD}(s) = \frac{\omega_c^2}{7.23} \, \frac{1+s\cdot 2.41/\omega_c}{1+s\cdot 2.41/(5.82\,\omega_c)}$$

b) $|G_{nu}(j\omega)| \to |F_{PD}(j\infty)| = K_p = \dfrac{\omega_c^2}{7.23}$ då $\omega \to \infty$

Då ω_c fördubblas ökar K_p och därmed känsligheten för mätstörningar i styrsignalen med en faktor 4.

4.

a) $\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = 3u \end{cases}$ $\quad \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} u$

$y = [1 \;\; 0] \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix}$

$u = -[l_\theta \;\; l_\omega] \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} + K_r \theta_r$

$G_{\theta_r \theta} = C(sI - A + BL_u)^{-1} B K_r =$

$= [1 \; 0] \left[\begin{pmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3l_\theta & 3l_\omega \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 3K_r \end{bmatrix} =$

$= [1 \; 0] \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3l_\theta & s+3l_\omega \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 3K_r \end{bmatrix} =$

$= \dfrac{[1 \; 0] \begin{bmatrix} s+3l_\omega & 1 \\ -3l_\theta & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3K_r \end{bmatrix}}{s^2 + 3l_\omega s + 3l_\theta} = \dfrac{3K_r}{\underbrace{s^2+3l_\omega s+3l_\theta}_{(s+\alpha)^2 = s^2+2\alpha s+\alpha^2}}$

$l_\omega = \dfrac{2\alpha}{3} \qquad l_\theta = \dfrac{\alpha^2}{3}$

$G_{\theta_r \theta}(0) = 1 \Rightarrow K_r = l_\theta = \dfrac{\alpha^2}{3}$

b) $L(s) = L_u(sI - A)^{-1}B = [l_\theta \;\; l_\omega] \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} =$

$= [l_\theta \;\; l_\omega] \dfrac{\begin{bmatrix} 3 \\ 3s \end{bmatrix}}{s^2} = \dfrac{3l_\theta + 3l_\omega s}{s^2} = \dfrac{\alpha^2 + 2\alpha s}{s^2}$

$T(s) = \dfrac{L(s)}{1+L(s)} = \dfrac{\alpha^2 + 2\alpha s}{s^2 + 2\alpha s + \alpha^2} = \dfrac{2\alpha(s+\alpha/2)}{(s+\alpha)^2}$

c) $T(s) \approx L(s)$ för stora s

Tillståndsåterkoppling:

$L(s) \approx \frac{2\alpha}{s}$ för stora s

PD-regulator: $L(s) = G(s) F_{PD}(s) =$

$= \frac{3}{s^2} b K_p$ för stora s

Eftersom PD-regulatorn har [-2] lutning jämfört med tillståndsåterkopplingens mindre dämpning [-1] så är den senare mer känslig för hög-frekventa resonanser jmf robust stabilitet då $|T| < \frac{1}{|\Delta_m|}$

dvs mindre $|T|$ för stora s ger bättre robust stabilitet.

5. a) $G(s) = e^{-sh}$ $\qquad G_d(z) = z^{-1}$ $\qquad F_d(z) = K_p$

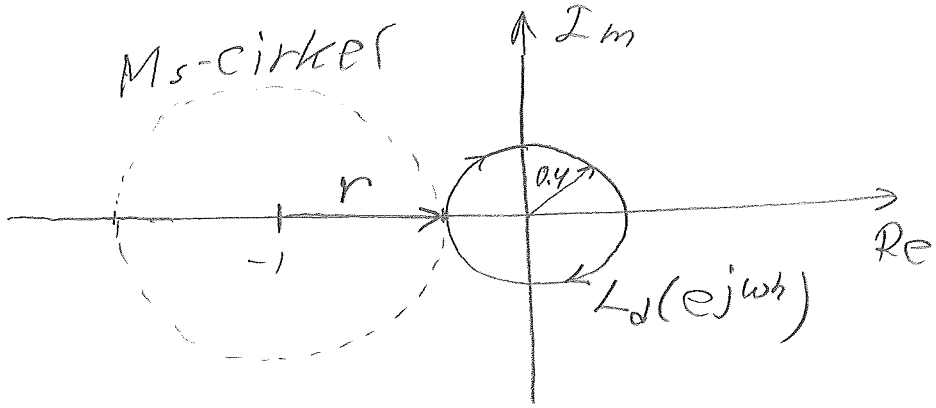
$$L_d(z) = G_d(z) F_d(z) = K_p z^{-1}$$

$$G_{ry_d}(z) = \frac{L_d(z)}{1+L_d(z)} = \frac{K_p z^{-1}}{1+K_p z^{-1}} = \frac{K_p}{z+K_p}$$

$z + A_m K_p = 0$ $\qquad A_m = 2{,}5$ $\qquad$ stabilitetsgräns för $|z|=1$

$K_p = 0.4 \Longleftrightarrow z = -1$

b) $L_d(e^{j\omega h}) = 0.4 e^{-j\omega h} = 0.4(\cos\omega h - j\sin\omega h)$



$r = 0.6 = \frac{3}{5}$ är minsta avståndet från $L_d(e^{j\omega h})$ till punkten -1

$$M_s = \frac{1}{r} = \frac{1}{3/5} = \frac{5}{3} \approx 1.67$$