Reglerteknik Z / Bt / I / Kf / F

Kurskod: SSY 050, ERE 080, ERE 091

Tentamen 2007-05-29

Tid: 8:30-12:30, Lokal: M-huset

Lärare: Knut Åkesson tel 3717, 0701-74 95 25

Tentamen omfattar 25 poäng, där betyg tre fordrar 10 poäng, betyg fyra 15 poäng och betyg fem 20 poäng.

Tentamensresultat anslås senast den *13 juni* på avdelningens anslagstavla E-huset våning 5. *Granskning* av rättning sker den *13 och 14 juni* kl 12:30-13:00 på avdelningen.

Tillåtna hjälpmedel:

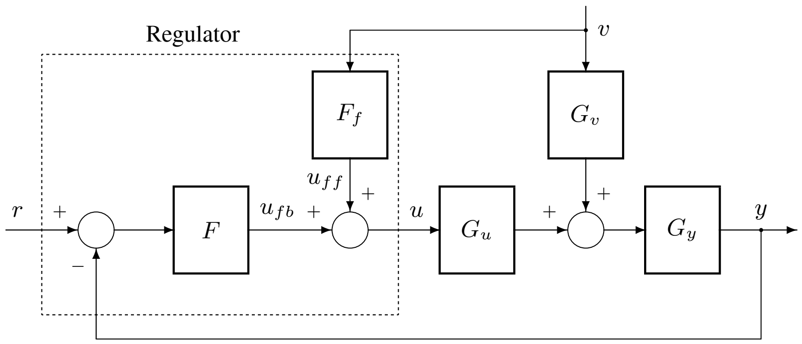
- Formelsamling i reglerteknik (gammal och ny). Anteckningar är tillåtna i formelsamlingen.
- Bodediagram (finns längst bak i tentatesen).
- Matematiska och fysikaliska tabeller, t ex Beta och Physics handbook.
- Valfri kalkylator.

Lycka till!

Institutionen för signaler och system
Avdelningen för reglerteknik, automation och mekatronik
Chalmers tekniska högskola

1

En process med en osäker förstärkningsparameter K_0 styrs med både fram- och återkoppling enligt följande blockschema



där

$$G_y(s) = \frac{3}{1+2s} \qquad G_u(s) = \frac{K_0}{1+s} \qquad G_v(s) = 1 \qquad F(s) = \frac{K_i}{s}$$

Förmågan att dämpa lågfrekventa laststörningar $v(t)$ ska undersökas då framkoppling ingår, jämfört med situationen då enbart återkoppling utnyttjas.

a) Bestäm frekvensfunktionens belopp som funktion av K_i, K_0 och ω för det återkopplade systemet från laststörningen v till utsignalen y för låga frekvenser (lågfrekvensasymptoten) då enbart återkoppling ingår, d.v.s. $F_f = 0$.

(1 p)

b) Bestäm en statisk framkoppling F_f då förstärkningen i G_u antas ha det nominella värdet K, medan det verkliga värdet K_0 är osäkert på grund av variationer i processmodellen.

(1 p)

c) Bestäm samma lågfrekvensasymptot som i uppgift a) då även framkopplingen F_v från uppgift b) ingår.

(1 p)

d) Bestäm kvoten mellan de båda lågfrekvensasymptoterna då framkoppling ingår jämfört med fallet utan framkoppling.

(1 p)

e) För vilka värden på förstärkningen K_0 ger framkopplingen en positiv inverkan på förmågan att dämpa störningar, jämfört med fallet då endast återkoppling ingår. Antag att förstärkningarna K_0 och K är positiva.

(1 p)

2

En fjärde ordningens process

$$G(s) = \frac{1}{(1+s)^4}$$

ska regleras.

a) Dimensionera först en PI-regulator

$$F_{PI}(s) = K_i \frac{1 + T_i s}{s}$$

för denna process så att fasmarginalen $\varphi_m = 50°$. Välj $\omega_c = 0.4\omega_{G150}$ där $\angle G(\omega_{G150}) = -150°$. Detta ger en nära nog optimal PI-regulator i meningen att laststörningar kompenseras effektivt samtidigt som rimliga stabilitetsmarginaler upprätthålls.

(2 p)

b) Dimensionera som ett alternativ en PID-regulator

$$F_{PID}(s) = K_i \frac{1 + 2\zeta s\tau + (s\tau)^2}{s(1 + s\tau/\beta)}$$

med samma fasmarginal $\varphi_m = 50°$ men 50% högre överkorsningsfrekvens, d.v.s. $\omega_c = 0.6\omega_{G150}$. Välj $\zeta = 1$ och $\beta = 10$.

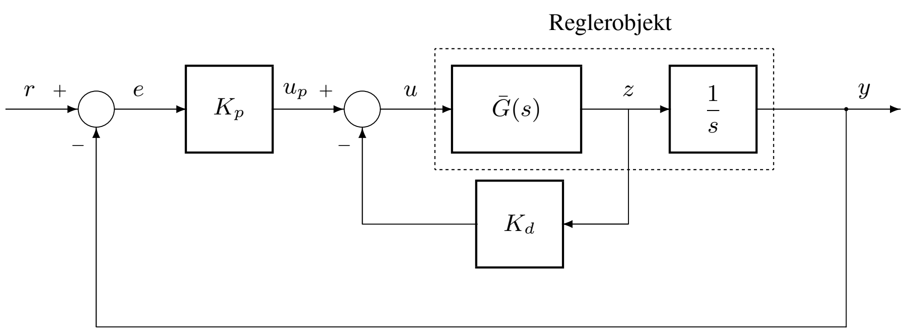
(2 p)

c) Kommentera skillnaderna i förmågan att kompensera lågfrekventa laststörningar och känsligheten för högfrekventa mätstörningar i styrsignalen genom att studera kriterierna $J_v = 1/K_i$ och $J_u = F(\infty)$.

(1 p)

3

Betrakta följande återkopplade system med en inre återföring där $\bar{G}(s) = 1/(s+1)$.



a) Bestäm K_p och K_d så att det återkopplade systemets poler hamnar i en dubbelpol i $s = -1/T$. Notera att motsvarande insvängningstid $t_{5\%} \approx 4.6T$.

(2 p)

b) Antag nu i stället att den yttre återkopplingen från y realiseras med hjälp av dator med ett styrintervall h, medan den inre återföringen fortfarande realiseras som en tidskontinuerlig reglerloop med kontinuerlig uppdatering av styrsignalen. Denna mixat tidskontinuerliga och tidsdiskreta reglerfunktion beskrivs i figuren ovan genom att sampla signalen e före (till vänster om) blocket K_p och lägga till en hållkrets efter (till höger om) blocket K_p (styckvis konstant u_p).

Diskretisera den tidskontinuerliga modell som fås då enbart den inre återkopplingen exekveras med u_p som insignal och y som utsignal. Välj samma K_d som ovan, och nu speciellt för $T = 1$.

(2 p)

c) Bestäm det totala tidsdiskreta återkopplade systemet från r till y baserat på den tidsdiskreta modellen i uppgift b) och välj K_p så att en tidsdiskret dubbelpol z erhålls. Notera motsvarande ekvivalenta tidskontinuerliga tidskonstant τ där $z = e^{-h/\tau}$. Välj $h = 1$ och jämför snabbheten för detta tidsdiskreta system med motsvarande tidskontinuerliga system där motsvarande tidskonstant var $T = 1$.

(1 p)

4

En instabil kemisk process som ges av tilståndsmodellen

$$\dot{x}(t) = x(t) + bu(t)$$

ska stabiliseras med en P-regulator $F(s) = K_p$.

a) Bestäm det återkopplade systemets pol som funktion av förstärkningen K_p och välj denna förstärkning så att det finns en marginal hos parametern b på en faktor 3 (uppåt och nedåt) innan det återkopplade systemet blir instabilt.

(2 p)

b) Bekräfta stabiliteten för det återkopplade systemet med hjälp av Nyquists generella stabilitetskriteriet.

(1 p)

c) Skissera principiellt vad som händer med Nyquistkurvan vid ovanstående P-reglering, då en fördröjning introduceras i styrsignalen, d.v.s. $u(t)$ ersätts med $u(t - T_d)$. (För den som ej klarar av föregående deluppgift studeras i stället ett förenklat (vanligt) Nyquistdiagram från $\omega = 0$ till $\omega = \infty$).

(1 p)

d) För vilken dödtid T_d övergår det återkopplade systemet enligt uppgift c) från ett stabilt till ett instabilt system? Ledning: Då gäller att $|L(j\omega_\pi)| = 1$, där $\angle L(j\omega_\pi) = -180°$

(1 p)

5

En regulator för en första ordningens process

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

ska dimensioneras.

a) Bestäm en tillståndsåterkoppling

$$u = -L_u x + K_r r$$

så att det återkopplade systemets pol hamnar i $s = -\alpha$. Bestäm kretsöverföringen $L(s)$.

(2 p)

b) Introducera som ett alternativ en tillståndsåterkoppling från en observatör

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu - K_y C\hat{x} - K_y(r - y)\\ u &= -L_u\hat{x}\end{aligned}$$

och välj tillståndsåterkopplingen L_u som i uppgift a) samt observatörens pol så att $\det(sI_n - A + K_y C) = s + 2\alpha$.

(1 p)

c) Bestäm regulatorns överföringsfunktion $F(s) = U(s)/E(s)$, där $E(s) = R(s) - Y(s)$ samt kretsöverföringen $L(s)$ för $\alpha = 2$.

(1 p)

d) Studera den komplementära känslighetsfunktionen $T(s) = L(s)/(1 + L(s))$ för de båda fallen tillståndsåterkoppling utan och med observatör. Jämför speciellt högfrekvensasymptoterna och diskutera känsligheten för icke-modellerade högfrekventa resonanser med avseende på det återkopplade systemets stabilitet.

(1 p)

Lösning till tentamen i Reglerteknik 2007-05-29

BL 070528

1. a) $\frac{Y}{V} = \frac{G_v G_y}{1+L}$ där $L = G_y G_u F = \frac{3}{1+2s}\frac{K_0}{1+s}\frac{K_i}{s}$

För små $s = j\omega$ gäller då att

$$\frac{Y}{V} \approx \frac{3}{1+3K_0K_i/s} \approx \frac{s}{K_0K_i} \qquad \frac{|Y|}{|V|} \approx \frac{\omega}{K_0K_i}$$

b) $\frac{Y}{V} = \frac{G_y(G_v + G_u F_f)}{1+L}$ statisk framkoppling

$$F_f = -\frac{G_v(0)}{G_u(0)} = -\frac{1}{K}$$

c) $$\frac{Y}{V} \approx \frac{3(1-K_0/K)}{1+3K_0K_i/s} \approx \frac{s(1-K_0/K)}{K_0K_i} \qquad \frac{|Y|}{|V|} \approx \frac{\omega(K-K_0)}{KK_0K_i}$$

d) $$\frac{|Y|/|V|_{FF+FB}}{|Y|/|V|_{FB}} = \frac{\omega(K-K_0)}{KK_0K_i}\cdot\frac{K_0K_i}{\omega} = \frac{K-K_0}{K}$$

e) $|K-K_0| < K \Rightarrow$ positivt bidrag då framkoppling utnyttjas $\Leftrightarrow$ $K_0 < 2K$

2 a) $\underline{\angle G(j\omega_{G150})} = -4\arctan\omega_{G150} = -150°$

$\Rightarrow \omega_{G150} = \tan 37{,}5° = 0{,}767$ rad/s $\qquad \omega_c = 0{,}4\,\omega_{G150} \approx 0{,}307$ rad/s

$\underline{\angle G(j\omega_c)} + \underline{\angle F_{PI}(j\omega_c)} = -4\arctan\omega_c - 90° + \arctan\omega_c T_i$
$= -180° + \varphi_m = -130°$

$$T_i = \frac{1}{\omega_c}\tan(4\arctan\omega_c - 40°) = 1.751$$

$$|G(j\omega_c)|\,|F_{PI}(j\omega_c)| = \frac{1}{(1+\omega_c^2)^2}\frac{K_i\sqrt{1+(\omega_cT_i)^2}}{\omega_c} = 1$$

$$K_i = \frac{\omega_c(1+\omega_c^2)^2}{\sqrt{1+(\omega_cT_i)^2}} = 0.324$$

$J_v = 1/K_i = 3.09$

$J_u = K_p = K_i T_i = 0.567$

b) $\omega_c = 0.6 \cdot \omega_{G150} = 0.6 \cdot 0.767 = 0.460$ rad/s

$|G(j\omega_c)| = \frac{1}{(1+\omega_c^2)^2} = 0.835 \quad \angle G(j\omega_c) = -4 \arctan \omega_c = = -98.8^\circ$

$\angle F_{PID}(j\omega_c) = -180^\circ + \varphi_m - \angle G(j\omega_c) = -180^\circ + 50^\circ + 98.8^\circ = = -31.2^\circ$

FS $\Rightarrow \quad \omega_c \tau = 0.61 \quad \Rightarrow \tau = 1.326$

$K_\infty |G(j\omega_c)| = 4.45 \Rightarrow K_\infty = K_i \tau \beta = \frac{4.45}{0.835} = 5.33$

$K_i = \frac{4.45}{10 \cdot 1.326 \cdot 0.835} = 0.402$

c) PI: $J_v = 3.09 \quad J_u = 0.567 \quad$ PID: $J_v = 2.49$, $J_u = 5.33$

$\frac{J_{vPID}}{J_{vPI}} = 0.81 \qquad \frac{J_{uPID}}{J_{uPI}} = 9.4$

$\therefore$ Nästan 10 gånger högre J_u ger 19% förbättring av J_v

3. a) $\frac{Y}{U_p} = \frac{\bar{G}}{s(1+\bar{G}K_d)} = \frac{1}{s(s+1+K_d)} \qquad \frac{Y}{R} = \frac{\frac{K_p}{s(s+1+K_d)}}{1+\frac{K_p}{s(s+1+K_d)}} = \frac{K_p}{s^2+(1+K_d)s+K_p}$

$= \frac{1}{(1+sT)^2} = \frac{\left(\frac{1}{T}\right)^2}{s^2+\frac{2}{T}s+\left(\frac{1}{T}\right)^2} \Rightarrow K_p = \frac{1}{T^2}$

$K_d = \frac{2}{T} - 1$

b) $\frac{Y}{U_p} = G_{u_p y} = \frac{1}{s(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} = \frac{As+2A+Bs}{s(s+2)}$

$\Rightarrow A+B=0,\ 2A=1 \Rightarrow A=0.5,\ B=-0.5$

$G_{u_p y_d} = \frac{0.5h}{z-1} - \frac{0.5}{\alpha}\frac{1-\alpha}{z-\alpha};\ \alpha = e^{-2h},\ h=1 =$

$= \frac{0.5(z-0.135) - 0.216(z-1)}{z^2-(1+\alpha)z+\alpha} = \frac{0.284z+0.149}{z^2-1.135z+0.135}$

c) $G_{ry_d} = \frac{K_p G_{u_p y_d}}{1+K_p G_{u_p y_d}} = \frac{K_p(\ldots)}{z^2-1.135z+0.135+0.284K_p z+0.149K_p}$

$= \frac{K_p(\ldots)}{(z-\beta)^2} = \frac{K_p(\ldots)}{z^2-2\beta z+\beta^2} \qquad \beta = (1.135-0.284K_p)/2 =$

$= 0.568 - 0.142K_p$

$$\beta^2 = (0.568 - 0.142K_p)^2 = 0.135 + 0.149K_p$$

$$(4 - K_p)^2 = 6.70 + 7.39K_p$$

$$K_p^2 + 16 - 8K_p - 7.39K_p - 6.70 =$$

$$= K_p^2 - 15.39K_p + 9.3 = 0$$

ger $\beta < 0$

$$K_p = 7.695 \pm \sqrt{(7.695)^2 - 9.3} = 7.695 \overset{(+)}{-} 7.065$$

$$= 0.63 \qquad \beta = 0.568 - 0.142 \cdot 0.63 = 0.479 = e^{-1/\tau}$$

$$\frac{1}{\tau} = -\ln 0.479 \Rightarrow \tau = \frac{1}{-\ln 0.479} = 1.36 \text{ s.}$$

∴ 36% långsammare system.

4. a) $\dot{x} = x + bu \Rightarrow G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{b}{s-1} \qquad L(s) = \frac{K_p b}{s-1}$

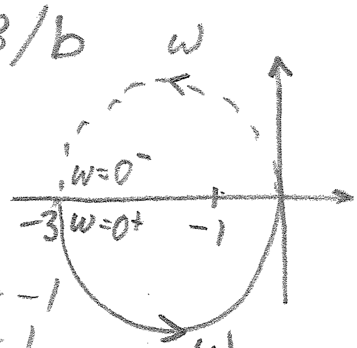
$$G_{ry}(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{K_p b}{s - 1 + K_p b} \quad \text{stabilt då } K_p b - 1 > 0$$

Antag $b > 0 \Rightarrow$ stabilt då $K_p > 1/b$

marginal med faktor $3 \Rightarrow K_p = 3/b$

b) $L(s) = \frac{3}{s-1} \qquad |L(j\omega)| = \frac{3}{\sqrt{1+\omega^2}}$

$L(j\omega) = \frac{3}{j\omega - 1} \qquad \underline{/L(j\omega)} = -180° + \arctan\omega$



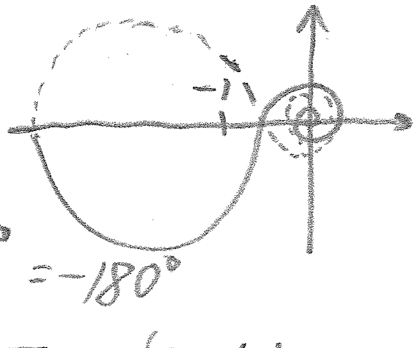
$N = -1$

$P = 1$

$Z = N + P = 0$

c) $L(j\omega) = \frac{3e^{-j\omega T_d}}{j\omega - 1}$

$\Rightarrow$ ytterligare negativ fasvridning



d) $\underline{/L(j\omega_\pi)} = -180° + \arctan\omega_\pi - \frac{\omega_\pi T_d \cdot 180°}{\pi} = -180°$

$|L(j\omega_\pi)| = \frac{3}{\sqrt{1+\omega_\pi^2}} = 1$

$1 + \omega_\pi^2 = 9 \Rightarrow \omega_\pi = \sqrt{8} = 2.83$

$$T_d = \frac{\pi \arctan \omega_\pi}{180° \, \omega_\pi} =$$

$$= \frac{\pi \arctan 2.83}{180° \cdot 2.83}$$

$$= 0.435$$

5. $G(s) = \frac{1}{s+1} \Rightarrow \dot{x} = -x + u$

$y = x$

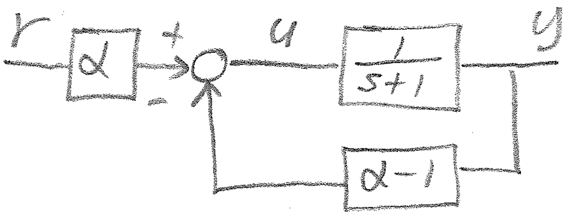
a) önskad polplacering i $s = -\alpha$

$u = -L_u x + K_r r$

$$\begin{cases} \dot{x} = -(1+L_u)x + K_r r \\ y = x \end{cases} \Rightarrow G_{ry}(s) = \frac{K_r}{s + \underbrace{(1+L_u)}_{\alpha}}$$

$\alpha = 1 + L_u \Rightarrow L_u = \alpha - 1$

$G_{ry}(0) = 1 \Rightarrow \frac{K_r}{\alpha} = 1 \Rightarrow K_r = \alpha$



$L(s) = \frac{\alpha - 1}{s+1}$

b) $s - (-1) + K_y = s + 2\alpha \Rightarrow K_y = 2\alpha - 1$

c) $s\hat{X}(s) = -\hat{X}(s) - L_u \hat{X}(s) - K_y \hat{X}(s) - K_y E(s)$

$U(s) = -L_u \hat{X}(s)$

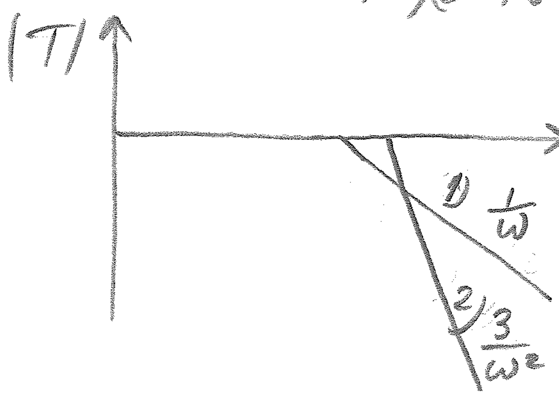
$$\frac{U(s)}{E(s)} = F(s) = -(\alpha - 1)\frac{-(2\alpha - 1)}{s + 1 + (\alpha - 1) + (2\alpha - 1)} = \frac{3}{s+5}$$

$$L(s) = G(s)F(s) = \frac{3}{(s+1)(s+5)}$$

d) 1. Tillståndsåterkoppling $T(s) = \frac{\frac{1}{s+1}}{1 + \frac{1}{s+1}} = \frac{1}{s+2_{K\alpha}}$

2. Tillståndsåterkoppling från observatör

$$T(s) = \frac{3/(s^2+6s+5)}{1 + 3/(s^2+6s+5)} = \frac{3}{s^2 + 6s + 8} = \frac{3}{(s+2)(s+4)}$$



HF-asymptoter för T

1) $T_{HF} = \frac{1}{\omega}$ 2) $T_{HF} = \frac{3}{\omega^2}$

Robust stabilitetskravet

$|T| < \frac{1}{|\Delta_G|} \Rightarrow$ 1) (utan observatör) är mer känslig för HF resonanser ... $|T|_2 < |T|_1$ för HF