Reglerteknik Z / Bt / I

Kurskod: SSY 050 och ERE 080

Tentamen 2007-01-16

Tid: 14:00-18:00, Lokal: V-huset

Lärare: Bengt Lennartson tel 3722

Tentamen omfattar 25 poäng, där betyg tre fordrar 10 poäng, betyg fyra 15 poäng och betyg fem 20 poäng.

Tentamensresultat anslås senast den *30 januari* på avdelningens anslagstavla E-huset våning 5. *Granskning* av rättning sker den *30 och 31 januari* kl 12:30-13:00 på avdelningen.

Tillåtna hjälpmedel:

- Formelsamling i reglerteknik (gammal och ny). Anteckningar är tillåtna i formelsamlingen.
- Bodediagram (finns längst bak i tentatesen).
- Matematiska och fysikaliska tabeller, t ex Beta och Physics handbook.
- Valfri kalkylator.

Lycka till!

Institutionen för signaler och system
Avdelningen för reglerteknik, automation och mekatronik
Chalmers tekniska högskola

1

En andra ordningens process

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

skall regleras. De tre regulatorerna

$$F_I(s) = \frac{0.4}{s} \qquad F_{PI}(s) = 1.7\,\frac{s+0.8}{s} \qquad F_{PI_f}(s) = 5.6\,\frac{s+0.8}{s(s+5)}$$

jämförs. Den tredje regulatorn kan ses som en PI-regulator i serie med ett lågpassfilter. De tre regulatorerna är inställda så att fasmarginalen $\varphi_m = 50°$, d.v.s. de har likvärdiga stabilitetsmarginaler.

a) Utred de tre regulatorernas egenskaper för denna andra ordningens process genom att bestämma lågfrekvensasymptoterna för $S(s)$ och $S(s)G(s)$ samt högfrekvensasymptoten för $F(s)S(s)$. Räkningarna förenklas genom att först studera låg- och högfrekvensegenskaperna för känslighetsfunktionen $S(s)$.

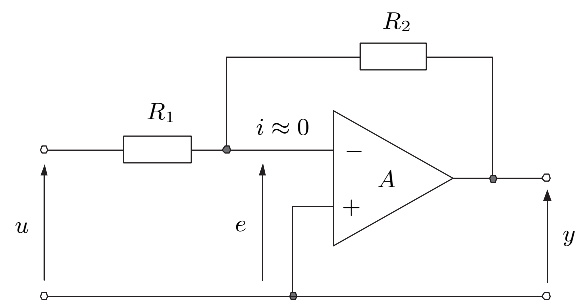
(3 p)

b) Vilka slutsatser kan vi dra när det gäller reglersystemens förmåga att följa referenssignaler, kompensera processtörningar samt styrsignalens känslighet för mätstörningar? I vilka situationer bör speciellt den mest komplexa regulatorn F_{PI_f} rekommenderas?

(2 p)

2

Betrakta den återkopplade operationsförstärkaren



a) Visa att överföringsfunktionen från u till y är

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = -\alpha \frac{1}{1 + A^{-1}(s)(1+\alpha)}$$

då $Y(s) = -A(s)E(s)$ och $\alpha = R_2/R_1$.

(1 p)

b) En bredbandsförstärkare ska dimensioneras. Antag att överföringsfunktionen

$$A(s) = \frac{A_0}{1 + 0.05s}$$

Välj kvoten α så att den återkopplade förstärkarens lågfrekvensförstärkning får beloppet 10, samt välj förstärkningen A_0 så att motsvarande bandbredd blir $\omega_b = 10^5$.

(2 p)

c) Vad inträffar allmänt vid hög återkopplad förstärkning då överföringsfunktionen $A(s)$ innehåller ytterligare tidskonstanter? Studera speciellt fallet då

$$A(s) = \frac{A_0}{(1 + 0.05s)(1 + Ts)}$$

och ange det största värdet på tidskonstanten T så att komplexkonjugerade polpar för den återkopplade förstärkaren undviks. På vilket sätt begränsar denna tidskonstant den återkopplade förstärkarens bandbredd?

(2 p)

3

Den friktionsfritt rörliga massan m styrs av en hydraulkolv i nedanstående positionsservo. På grund av fjädringen med fjäderkonstanten k beräknas processen ha överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{2\omega_n^2}{s(s^2 + 0.4\omega_n s + \omega_n^2)}$$

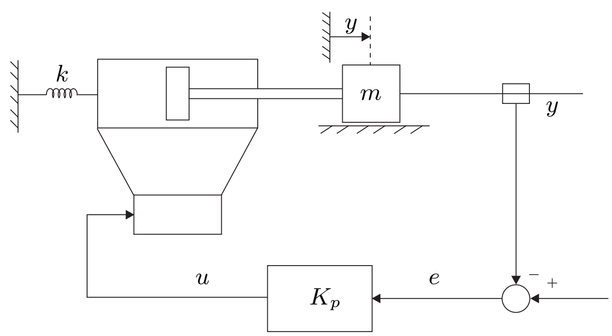
där $\omega_n = \sqrt{k/m} = 30$ rad/s (cylinders vikt försummad).

a) Rita ett Bodediagram för denna process och dimensionera en P-regulator så att amplitudmarginalen $A_m \geq 2$ och fasmarginalen $\varphi_m \geq 45°$. Välj samtidigt förstärkningen K_p så att det återkopplade systemet blir så snabbt som möjligt.

(3 p)

b) Vad händer med stabiliteten, framförallt amplitudmarginalen, då det visar sig att ω_n minskar till exempelvis $\omega_n = 20$ rad/s. En korrekt motivering krävs, med det räcker med ett principiellt resonemang baserat på erhållet Bode-diagram.

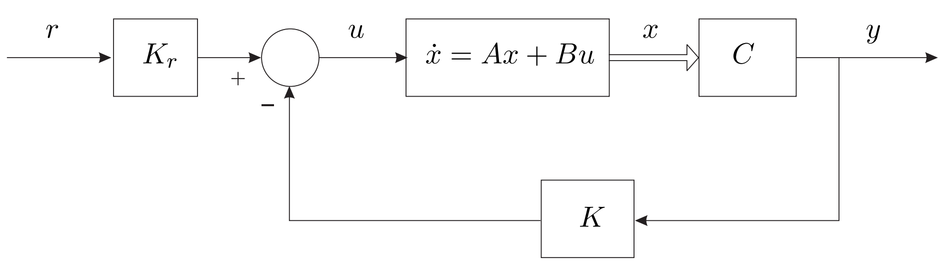
(2 p)



4

Betrakta följande återkopplade system, där

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix}$$



a) För vilka värden på K är systemet stabilt

(3 p)

b) Bestäm K_r som funktion av K så att kvarstående fel undviks från referenssignalen r till utsignalen y, under antagandet att K stabiliserar systemet.

(2 p)

5

En första ordningens process

$$G(s) = \frac{b}{s+a}$$

ska simuleras i en dator.

a) Bestäm därför en tidsdiskret modell

$$y(kh+h) = \alpha y(kh) + \beta u(kh)$$

där h är samplingsintervallets längd.

(1 p)

b) Visa att insvängningen från ett begynnelsevärde $y(0)$, då insignalen $u(kh) = 0$, kan uttryckas som

$$y(kh) = \alpha^k y(0)$$

och bestäm $y(t)$ för $t = 1$. Antag att $a = 1$.

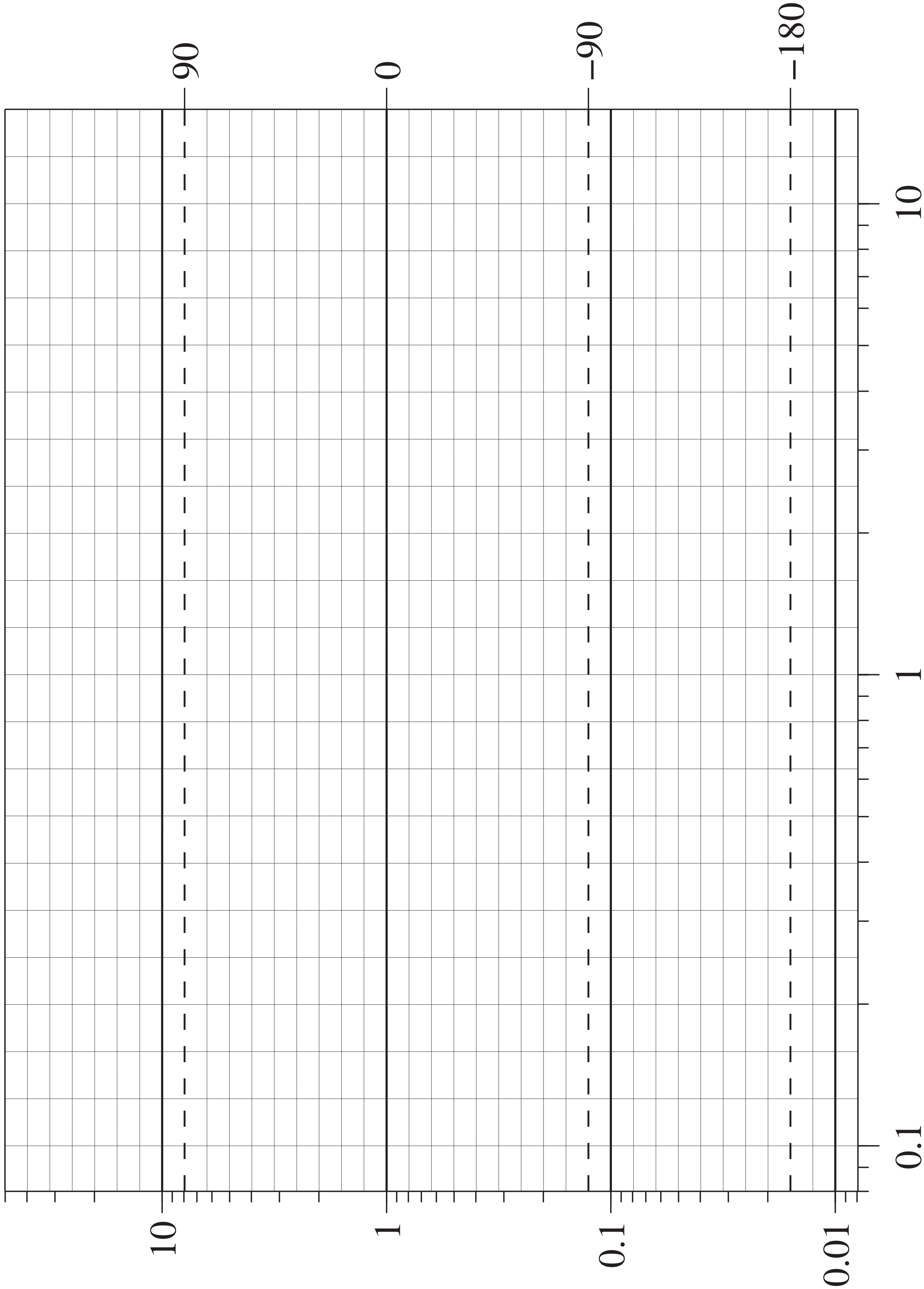
(1 p)

c) Numeriska problem kan uppstå då samplingsintervallet h är kort. Notera exempelvis att $\alpha \to 1$ oavsett värdet på a, då $h \to 0$. Vad blir då $y(\infty)$ vid ovan beskrivna insvängning, och vilken tidskontinuerlig process motsvarar detta?

(1 p)

d) Studera insvängningen då α representeras i datorn med ett litet relativt fel, d.v.s. α ersätts av $(1+\varepsilon)\alpha$ i ovanstående uttryck, där vi antar att $\varepsilon = 10^{-7}$. Bestäm y(1) $(a = 1)$ för $h = 10^{-2}$, 10^{-4} och 10^{-6} och studera skillnaden jämfört med den exakta lösningen från uppgift b), dvs ange felet i lösningen på grund av representationsfelet i datorn. Vilka slutsatser bör man dra när det gäller valet av h i förhållande till ε.

(2 p)



90
0
−90
−180
10
1
0.1
10
1
0.1
0.01

BL070124

Lösning till tentamen 070116 Reglerteknik

1 a) $S = \frac{1}{1+GF}$ $\quad G(s) \nearrow 1 \quad LF$, $\quad \searrow 0 \quad HF$

LF
$$S_I \approx \frac{1}{1+0.4/s} = \frac{s}{s+0.4} \approx 2.5s$$
$$S_{PI} \approx \frac{1}{1+\frac{1.7\cdot 0.8}{s}} \approx 0.735s$$
$$S_{PI_f} \approx \frac{1}{1+\frac{5.6\cdot 0.8}{5s}} \approx 1.12s$$

För LF gäller eftersom $G(0)=1$ att $SG = S$

HF

$S \approx 1$ eftersom $G \approx 0 \Rightarrow FS \approx F$

$$F_I S \approx \frac{0.4}{s} \qquad F_{PI} S \approx 1.7 \qquad F_{PI_f} S \approx \frac{5.6}{s}$$

b) PI-regulatorn har lägst förstärkning från laststörning (SG) och bäst förmåga att följa referenssignaler (litet S), medan känsligheten för högfrekventa mätstörningar hos styrsignalen (FS) är lägst för I och PI_f res. (lutning [-1] för HF). PI_f har både bra kompensering av laststörningar och bra kompensering av HF mätstörningar

2. a) $$\frac{U-E}{R_1}+\frac{Y-E}{R_2}=0 \qquad \alpha\left(U+A^{-1}Y\right)+Y+A^{-1}Y=0$$

$$\left(1+A^{-1}+\alpha A^{-1}\right)Y=-\alpha U \Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)}=-\alpha\frac{1}{1+A^{-1}(s)(1+\alpha)}$$

b) $$\frac{Y(s)}{U(s)}=-\frac{A_0\alpha}{A_0+(1+0.05s)(1+\alpha)}=-\frac{A_0\alpha}{A_0+1+0.05s+\alpha+0.05\alpha s}$$

$$=-\frac{\frac{A_0\alpha}{1+\alpha+A_0}}{1+\frac{0.05(1+\alpha)}{1+\alpha+A_0}s}=-\frac{10}{1+s/10^5}$$

Antag att $A_0 \gg 1 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha=10}}$

$$\Rightarrow \frac{0.05\cdot 11}{A_0}=\frac{1}{10^5} \Rightarrow \underline{\underline{A_0=55\cdot 10^3}}$$

c) $$\frac{Y(s)}{U(s)}=-\frac{A_0\alpha}{A_0+\underbrace{(1+0.05s)(1+Ts)}_{1+Ts+0.05s+0.05Ts^2}\cdot 11}$$

KE $$0.05Ts^2+(0.05+T)s+1+A_0/11=0$$

$$s^2+\frac{1+20T}{T}s+10^5/T=0$$

$$s=-\frac{1+20T}{2T}\pm\sqrt{\left(\frac{1+20T}{2T}\right)^2-\frac{10^5}{T}}$$

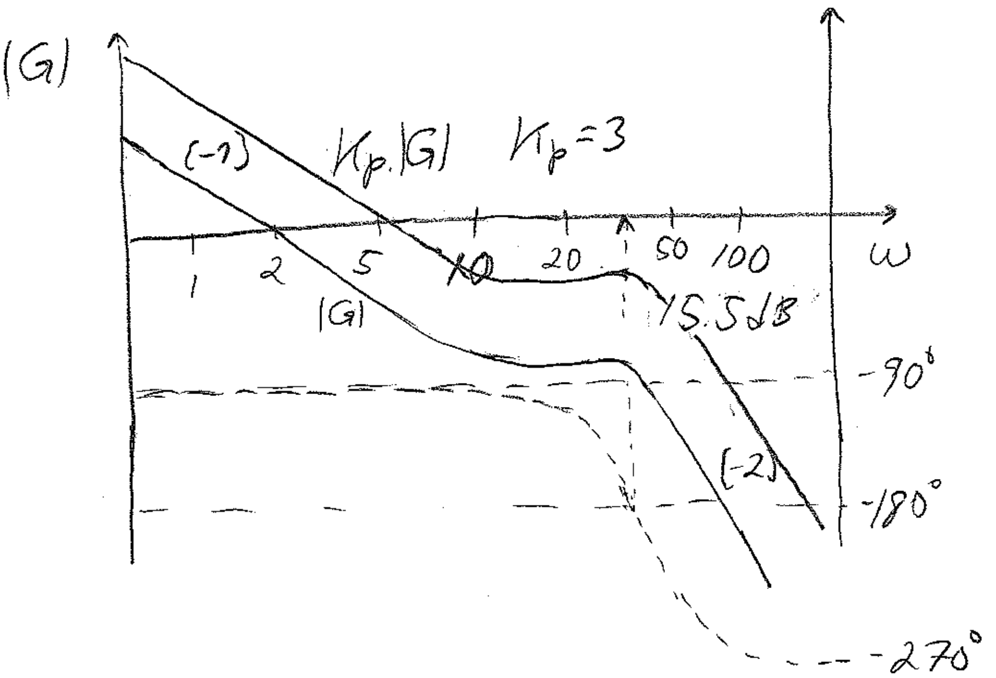
$T \ll 1 \Rightarrow \frac{1}{4T^2}>\frac{10^5}{T}$ för att undvika komplexkonjugerade poler

$\Rightarrow T<2.5\cdot 10^{-6}$

För stort T ger komplexkonjugerade poler (ω_n, ζ) vilket i sin tur begränsar $\omega_b \approx \omega_n$ uppåt.

3. $$G(s) = \frac{2}{s(1 + 2\cdot 0.2\, s/30 + (s/30)^2)}$$

a)



$\angle G(j30) = -180° \Rightarrow \omega_{180} = 30$ rad/s

$|G(j30)| \approx -15.5$ dB $\approx 1/6$

$K_p = 3 \Rightarrow A_m = 2$ & $\varphi_m \approx 90°$

b) Faskurvan skär $-180°$ ungefär vid $\omega = \omega_n$ vilket innebär att ω_{180} skjunker till 20 rad/s. Vid denna frekvens kommer lågfrekvens delen $2/w$ att bidra med en högre förstärkning $2/20$ i stället för $2/30$, dvs en faktor $\frac{2/20}{2/30} = 1.5$ högre, vilket innebär att amplitudmarginalen skjunker till $2/1.5 = 1.33$.

4\. a) $G(s) = C(sI-A)^{-1}B = [4\ 0]\begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$= \frac{[4\ 0]\begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}}{s^2+s+2} = \frac{[4\ 0]\begin{bmatrix} -s-1+2 \\ 2+2s \end{bmatrix}}{s^2+s+2} = \frac{4(1-s)}{s^2+s+2}$$

$$G_{ry}(s) = \frac{K_r G(s)}{1+KG(s)} = \frac{K_r 4(1-s)}{s^2+s+2+K\cdot 4(1-s)} =$$

$$= \frac{4K_r(1-s)}{s^2+(1-4K)s+2+4K}$$

RH tabell

s^2	1	$2+4K$
s^1	$1-4K$	0
s^0	$2+4K$	

stabilt system då

$1-4K>0 \quad 2+4K>0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{-0.5 < K < 0.25}}$

b) $G_{ry}(0) = 1 \Rightarrow \frac{4K_r}{2+4K} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{K_r = \frac{1}{2}+K}}$

5\. a) $G(s) = \frac{b}{a}\frac{a}{s+a} \Rightarrow \alpha = e^{-ah} \quad \beta = \frac{b}{a}(1-\alpha)$

b) Visas med induktion eftersom

$y(h) = \alpha y(0)$ och $y(kh+h) = \alpha y(kh) = \alpha\alpha^k y(0) = \alpha^{k+1}y(0)$

$y(kh) = (e^{-h})^k y(0) = e^{-kh}y(0)$

$kh=1 \Rightarrow y(1) = e^{-1}y(0)$

eller

$y(2h) = \alpha y(h) = \alpha^2 y(0)$

$y(3h) = \alpha y(2h) = \alpha^3 y(0)$

$y(4h) = \ldots$

c) $h \to 0 \Rightarrow \alpha \to 1 \quad y(\infty) = y(0)$

Ingen avklingning motsvarar en integral-process, dvs $a \to 0$, vilket också ger $\alpha = 1$

d) $y_\varepsilon(kh) = ((1+\varepsilon)\alpha)^k y(0) = (1+\varepsilon)^k \alpha^k y(0) =$

$= (1+\varepsilon)^k e^{-kh} y(0) = (1+\varepsilon)^k e^{-1} y(0)$

$y_\varepsilon(1) - y(1) = (1+\varepsilon)^k e^{-1} y(0) - e^{-1} y(0) = ((1+\varepsilon)^k - 1) e^{-1} y(0)$

h	$y(1)/y(0)$	$y_\varepsilon(1)/y(0)$	$(y_\varepsilon(1) - y(1))/y(0)$
10^{-2}	0.3679	0.3679	3.7E-6
10^{-4}	— " —	0.3683	3.7E-4
10^{-6}	— " —	0.4066	3.9E-2

$\varepsilon = 10^{-7}$

Felet ökar ungefär proportionellt mot 1/h dvs ett kort samplings-intervall ger större fel. Ett större ε ger större fel, dvs korta samplingsintervall kräver högre noggrannhet.