Reglerteknik Z2

Tentamen 2005-05-24

Tid: 8:45-12:45, Lokal: M-huset

Lärare: Bengt Lennartson tel 3722

Tentamen omfattar 25 poäng, där betyg tre fordrar 10 poäng, betyg fyra 15 poäng och betyg fem 20 poäng.

Tentamensresultat anslås senast den *9 juni* på avdelningens anslagstavla E-huset våning 5. *Granskning* av rättning sker den *9 och 10 juni* kl 12:30-13:00 på avdelningen.

Tillåtna hjälpmedel:

- Formelsamling i reglerteknik (gammal och ny). Anteckningar är tillåtna i formelsamlingen.
- Bodediagram (finns längst bak i tentatesen).
- Matematiska och fysikaliska tabeller, t ex Beta och Physics handbook.
- Valfri kalkylator.

Lycka till och en trevlig sommar!

Institutionen för signaler och system
Avdelningen för reglerteknik och automation
Chalmers tekniska högskola

1

En farthållare dimensioneras för ett fordon där processmodellen antas vara

$$Y(s) = \frac{0.5}{1 + 0.5s}\big(U(s) + V(s)\big)$$

Här är u styrsignalen [kN] (drivande kraft från motorn), v laststörningen [kN] (störkraft orsakad av ned- och uppförsbackar) och y fordonets hastighet [m/s]. Farthållaren består av en enkel I-regulator

$$U(s) = \frac{K_i}{s}\big(R(s) - Y(s)\big)$$

Studera speciellt hastigheten då farthålleren är inkopplad och fordonet färdas med den konstanta hastigheten 25 m/s (90 km/h) på plan väg, d.v.s. $r(t) = 25$ m/s. Vid tidpunkten $t = 0$ antas en mycket lång uppförssträcka starta som resulterar i en konstant motkraft på 5 kN.

a) Bestäm hastighet $y(t)$ då fordonet passerar uppför backen för de båda förstärkningarna $K_i = 0.75$ och 1, samt skissera $y(t)$ i ett tidsdiagram.

(4 p)

b) Beräkna speciellt hastigheten vid tidpunkterna $t = 1$ och 3, samt kommentera relationen mellan integralförstärkningens storlek K_i och farthållarens effektivitet när det gäller kompensering av laststörningar.

(1 p)

2

Dimensionera en P-regulator $F(s) = K_p$ för processmodellen

$$Y(s) = \frac{1}{(1 + s)^m}\big(U(s) + V(s)\big)$$

för $m = 1$ och 2, så att följande krav uppfylls: $\varphi_m \geq 50°$, $J_u = K_\infty \leq 20$, där K_∞ är regulatorns högfrekvensförstärkning $F(\infty)$.

a) Studera $G_{vy}(s)$ för en godtycklig förstärkning K_p vid låga frekvenser och välj sedan K_p så att lågfrekventa laststörningar v kompenseras så effektivt som möjligt, samtidigt som ovanstående krav på stabilitetsmarginal och styrsignalaktivitet uppfylls.

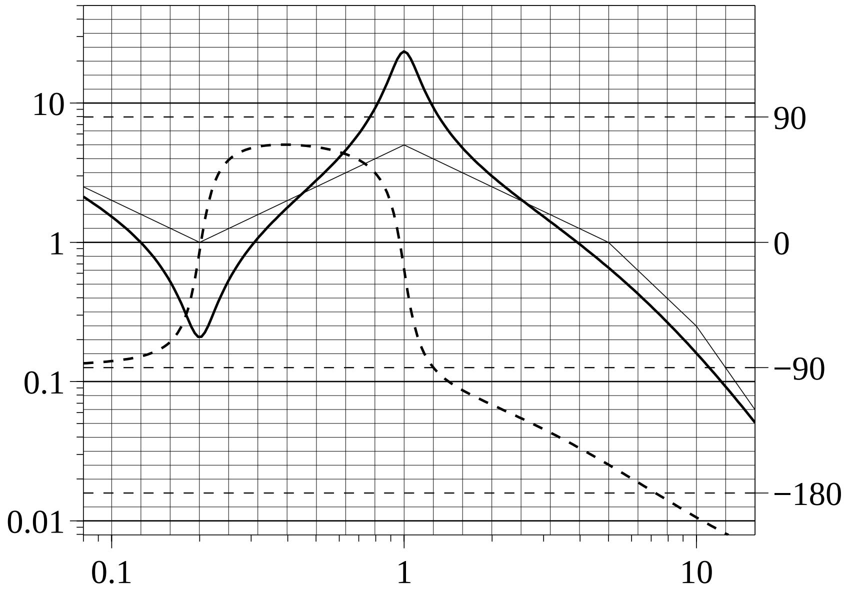
(4 p)

b) Förklara den stora skillnaden i den tillåtna förstärkningen K_p för $m = 1$ och $m = 2$.

(1 p)

3

Studera följande Bodediagram för en process $G(s)$ som endast har poler och nollställen i vänstra halvplanet.



a) Bestäm processens överföringsfunktion $G(s)$, med utnyttjande av den asymptotiska (tunn linje) och den exakta (tjock linje) beloppskurvan.

(2 p)

b) Dimensionera två regulatorer som ger $\omega_c = 4$ rad/s respektive $\omega_c = 8$ rad/s samt $\varphi_m = 50°$.

(2 p)

c) Kommentera det återkopplade systemets snabbhet, samt studera $G_{wu}(s)$ och ange hur känsligheten för högfrekventa mätstörningar i styrsignalen förändras, då ω_c dubbleras.

(2 p)

4

En icke-minfas process med ett nollställe i högra halvplanet i $s = 1$ har överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{(1-s)}{(s+1)^2}$$

Den ska regleras med en PID-regulator

$$F(s) = K_i \frac{(1+s)^2}{s(1+s/\beta)} \qquad (\zeta = 1,\ \tau = 1)$$

a) Vilka krav ställs på regulatorparametrarna K_i och β för att få ett stabilt återkopplat system?

(1 p)

b) Bestäm regulatorparametrarna K_i och β så att det återkopplade systemet får en dubbelpol i $s = -\omega_n$.

(2 p)

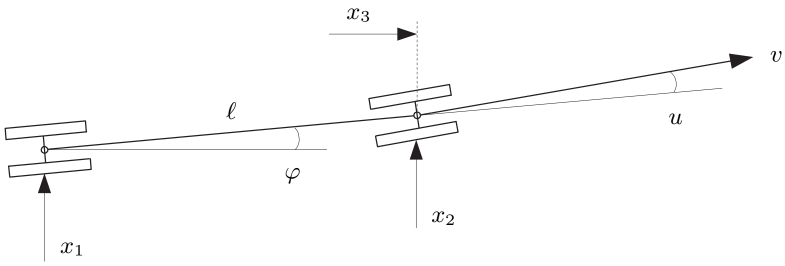
c) Bestäm känslighetsfunktionen $S(s)$ och skissera det asymptotiska amplituddiagrammet för $\omega_n = 1$, 10 och 100. Kommentera vad som händer med frekvensfunktionen för stora värden på ω_n. Ange speciellt vad som händer med stabilitetsmarginalen M_S.

(1 p)

d) Bestäm känslighetsfunktionens lågfrekvensasymptot som funktion av ω_n. Vilken övre gräns gäller för denna asymptot oavsett polplacering ω_n, och på vilket sätt begränsas därmed förmågan att kompensera lågfrekventa laststörningar. Vad är orsaken till denna övre gräns för känslighetsfunktionens lågfrekvensasymptot?

(1 p)

5



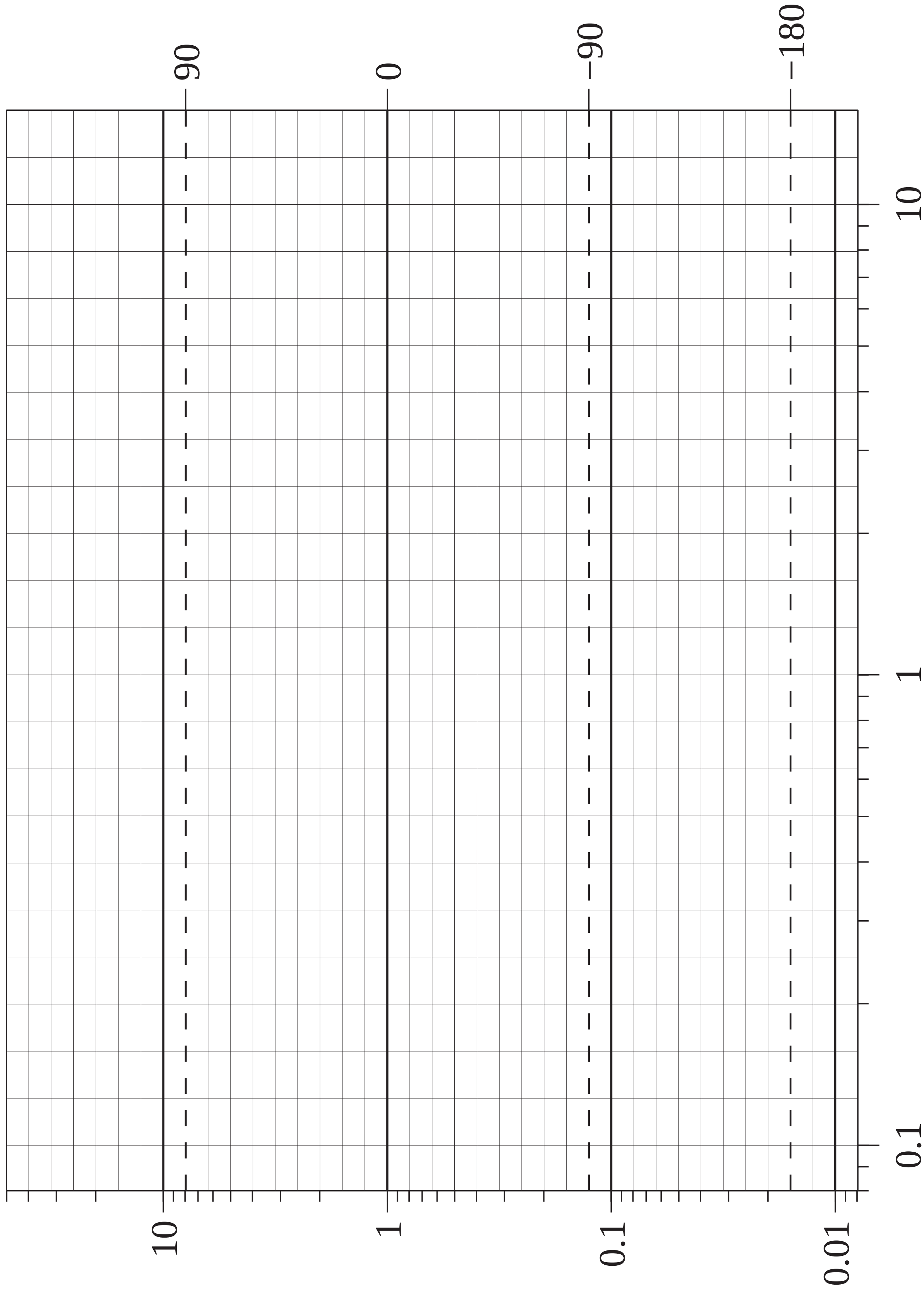
En truck med längden $\ell = 5$ m enligt figuren har fasta bakhjul och styrbara framhjul. För att förenkla uppgiften antas spårvidden vara mycket liten. Framhjulen drivs med konstant varvtal, vilket ger hastigheten $v = 8$ m/s i en riktning u radianer från truckens längsaxel.

a) Ställ upp de olinjära tillståndsekvationerna för trucken då enligt figuren tillståndsvariablerna x_1 och x_2 är hjulens avstånd från den horisontella axeln i ett rätlinjigt koordinatsystem, medan x_3 är motsvarande avstånd från den vertikala axeln till det främre hjulet.

(2 p)

b) Inför antagandet att vinklarna u och φ är små och ställ upp den linjära tillståndsmodellen samt överföringsfunktionerna från u till x_1 respektive x_2.

(2 p)


90
0
−90
−180
10
1
0.1
0.01
0.1
1
10

BL050524

Lösning till tentamen i reglerteknik
2005-05-24

1.

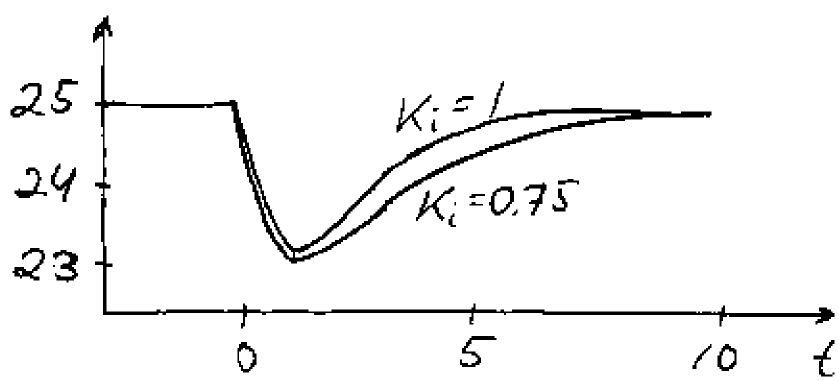
$$G_{vy}(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)F(s)} = \frac{\frac{1}{s+2}}{1+\frac{1}{s+2}\frac{K_i}{s}} = \frac{s}{s^2+2s+K_i}$$

$$\Delta Y(s) = G_{vy}(s)\,\Delta V(s) = \frac{s}{s^2+2s+K_i}\cdot\frac{-5}{s} = \frac{-5}{s^2+2s+K_i}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-5}{(s+1)^2} \; ; & K_i = 1 \\ \dfrac{-5}{(s+0.5)(s+1.5)} = -5\left(\dfrac{1}{s+0.5} - \dfrac{1}{s+1.5}\right) \; ; & K_i = 0.75 \end{cases}$$

Referenssignalen $r(t) = 25$ m/s $\Rightarrow$ $y_0 = 25$ m/s

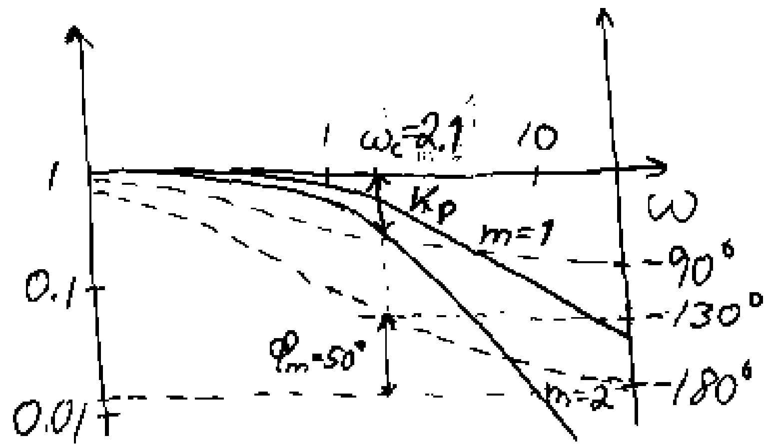
$$y(t) = y_0 + \mathcal{L}^{-1}\{\Delta Y(s)\} = \begin{cases} 25 - 5te^{-t} & K_i = 1 \\ 25 - 5(e^{-0.5t} - e^{-1.5t}) & K_i = 0.75 \end{cases}$$



K_i	$y(1)$	$y(3)$	$y(\infty)$
0.75	23.08	23.94	25
1	23.16	24.25	25

Den högre integralförstärkningen ger en snabbare och därmed effektivare kompensering av laststörningen.
(En bekräftelse av kriteriet $J_v = \frac{1}{K_i}$)

2\. a) $G(s) = \frac{1}{(s+1)^m}$ $m = 1, 2$ $F(s) = K_p$



$F(\infty) = K_\infty = K_p$

Kravet $J_u = K_\infty \leq 20$ begränsar K_p till

$K_p \leq 20$

$\varphi_m \geq 50^\circ$ ger ingen begränsning för $m=1$ eftersom $\varphi_m \geq 90^\circ$ för alla ω_c

För $m=2$ visar Bodediagrammet att $\varphi_m = 50^\circ \Leftrightarrow \omega_c = 2.1$ rad/s och $K_p = 5.6 \approx 15$ dB vilket ger begränsningen $K_p \leq 5.6$

$G_{vy}(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)K_p} \rightarrow \frac{1}{1+K_p}$ för små s (låga frekvenser)

$\Rightarrow$ hög förstärkning K_p ger bättre LF-kompensering

m	K_p	Begränsande krav
1	20	$J_u \leq 20$
2	5.6	$\varphi_m \geq 50^\circ$

aktuellt för m=2

b) $m=1$ ger inga begränsningar alls på K_p med avseende på stabilitet. T.o.m oändlig förstärkning ger $\varphi_m = 90^\circ$ och $A_m = \infty$. Den stora skillnaden beror på att J_u kravet är betydligt lindrigare än stabilitetskravet, som bara är

3.

a) LF-delen $G_{LF} = \frac{K}{s}$ $|G_{LF}| = \frac{K}{\omega} = 1$

för $\omega = 0.2 \Rightarrow K = 0.2$

Brytning $[-1] \rightarrow [+1]$ vid $\omega = 0.2$ med en underslång på ≈ -14dB $\leftrightarrow$

$1 + 2\zeta s/0.2 + (s/0.2)^2$ där FS s/6 visar att en sådan över/underslång motsvaras av en dämpning $\zeta \approx 0.1$

Brytning $[+1] \rightarrow [-1]$ vid $\omega = 1$ med motsvarande överslång på ≈ 14dB $\leftrightarrow$

$$\frac{1}{1 + 2 \cdot 0.1 s + s^2}$$

Brytning $[-1] \rightarrow [-2]$ vid $\omega = 5$ och brytning $[-2] \rightarrow [-3]$ vid $\omega = 10$ ger

$$\frac{1}{(1 + s/5)(1 + s/10)}$$ vilket totalt ger

$$G(s) = \frac{0.2(1 + s + (s/0.2)^2)}{s(1 + 0.2s + s^2)(1 + s/5)(1 + s/10)}$$

b) $\omega_c = 4$ rad/s $\angle G(j4) = -148°$ $|G(j4)| = 0.96$

$\varphi_{max} = \varphi_m - (180° + \angle G) = 50° - 32° = 18°$

$\Rightarrow b = \frac{1 + \sin(\varphi_{max})}{1 - \sin(\varphi_{max})} = 1.89$ $\tau_d = \frac{\sqrt{b}}{\omega_c} = 0.344$

$K_p = \frac{1}{|G(j4)|\sqrt{b}} = 0.76$ $F_{PD}(s) = K_p \frac{1 + s\tau_d}{1 + s\tau_d/b}$

ω_c	$\angle G(j\omega_c)$	$\lvert G(j\omega_c)\rvert$	φ_{max}	b	τ_d	K_p
4	−148°	0.96	18°	1.89	0.344	0.76
8	−185°	0.26	55°	10.1	0.396	1.21

c) $t_r \approx 1/\omega_c$ dvs dubblering av ω_c ger en halvering av stigtiden

$G_{wu}(s) \approx F(\infty)$ för höga frekvensen

$$F(\infty) = K_r \cdot b = \begin{cases} 1.44 & \omega_c = 4 \text{ rad/s} \\ 12.2 & \omega_c = 8 \text{ rad/s} \end{cases}$$

Styrsignalaktiviteten ökar därför med en faktor $12.2/1.44 = 8.5$ då snabbheten (stigtiden) halveras.

4.

$$L(s) = G(s)F(s) = \frac{1-s}{(s+1)^2}\,\frac{K_i(1+s)^2}{s(1+s/\beta)} = \frac{K_i(1-s)}{s+s^2/\beta}$$

a) $$S(s) = \frac{1}{1+L(s)} = \frac{s^2/\beta + s}{s^2/\beta + s + K_i(1-s)} = \frac{s(s+\beta)}{s^2+\beta(1-K_i)s+\beta K_i}$$

KE $s^2+\beta(1-K_i)s+\beta K_i = 0$

R-H tablå

s^2	1	βK_i	$\beta K_i > 0$
s^1	$\beta(1-K_i)$	0	$\beta(1-K_i) > 0$
s^0	βK_i		

$\beta > 0 \Rightarrow 0 < K_i < 1$

$\beta < 0 \Rightarrow K_i < 0,\ 1-K_i < 0 \Rightarrow K_i > 0 \Rightarrow$ Motstridiga krav

$\therefore$ stabilt återkopplat system då $\beta > 0$ och $0 < K_i < 1$

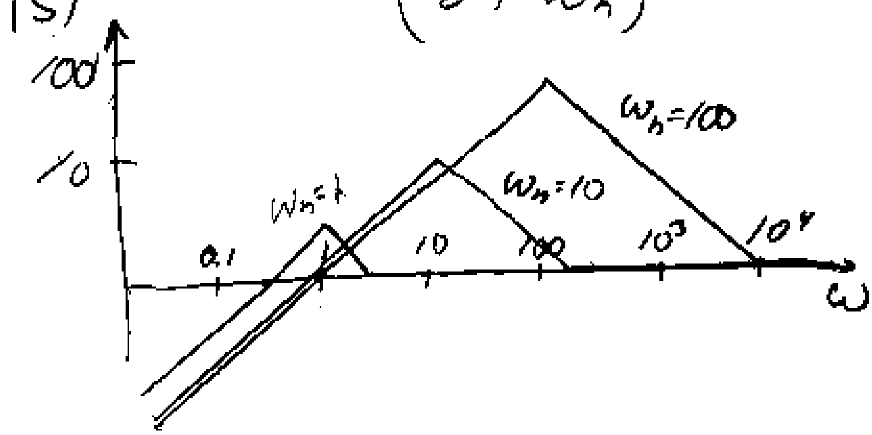
b) Dubbelpol i $s = -\omega_n \Rightarrow$ KE $(s+\omega_n)^2 = s^2+2\omega_n s+\omega_n^2 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\omega_n = \beta(1-K_i) \\ \beta K_i = \omega_n^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} K_i = 1 - \dfrac{2\omega_n}{\beta} = 1 - \dfrac{2K_i}{\omega_n} \\ \dfrac{\omega_n}{\beta} = \dfrac{K_i}{\omega_n} \end{cases}$$

$$\omega_n K_i + 2K_i = \omega_n \Rightarrow K_i = \frac{\omega_n}{2+\omega_n} = \frac{1}{1+2/\omega_n}$$

$$\beta = \frac{\omega_n^2(2+\omega_n)}{\omega_n} = \omega_n(2+\omega_n)$$

c) $S(s) = \frac{s(s+\omega_n(2+\omega_n))}{(s+\omega_n)^2} = \frac{s\left(1+\frac{s}{2\omega_n+\omega_n^2}\right)}{\underbrace{\frac{\omega_n}{2+\omega_n}}_{K_i}\left(1+\frac{s}{\omega_n}\right)^2}$



ω_n	K_i	$\beta = \omega_n(2+\omega_n)$
1	1/3	3
10	0.83	120
100	0.98	10^4

$M_s = \max_{\omega} |S(j\omega)| \approx \omega_n$ för stora ω_n

$K_i \approx 1$ — " —

d) LF-asymptoten är $\frac{s}{K_i} = \frac{s}{\omega_n/(2+\omega_n)}$

$\rightarrow 1$ då $\omega_n \rightarrow \infty$.

Eftersom $J_v = \frac{1}{K_i}$ och K_i begränsas uppåt, så begränsas förmågan att hantera laststörningar, oavsett hur snabb polplacering (stort ω_n) som väljs. Detta beror på nollstället i högra halvplanet hos processen $G(s)$.

5. a) $\dot{x}_1 = \underbrace{v\cos(u)}_{\text{bakhjulets hastighet}}\sin\varphi$

$\dot{x}_2 = v\sin(u+\varphi)$ där $\sin\varphi = (x_2 - x_1)/l$

$\dot{x}_3 = v\cos(u+\varphi)$

b) Linjärisering med små vinklar u och φ $\Rightarrow$ $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$

$\dot{x}_1 = v\varphi = \frac{v}{l}(x_2 - x_1)$ $\quad v = 8\,m/s$

$\dot{x}_2 = vu + v\varphi = \frac{v}{l}(x_2 - x_1) + vu$ $\quad l = 5\,m$

$\dot{x}_3 = v$

Arbetspunkten bestäms av att $\varphi = u = 0$ dvs $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ och $\dot{x}_3 = 8$

Vi antar för enkelhetens skull att arbetspunkten är $x_1 = x_2 = 0$, medan x_3 växer linjärt dock oberoende av övriga tillståndsvariabler varför vi utesluter denna tillståndsvariabel i den fortsatta analysen.

Laplace $\Rightarrow$

$$\begin{cases} sX_1 = 1.6\,(X_2 - X_1) \\ sX_2 = 1.6\,(X_2 - X_1) + 8U \end{cases} \qquad \begin{matrix} (s+1.6)X_1 = 1.6X_2 \\ (s-1.6)X_2 = -1.6X_1 + 8U \end{matrix}$$

$$\underbrace{(s+1.6)(s-1.6)}_{s^2 - 1.6^2}X_2 = -1.6\cdot 1.6\,X_2 + 8(s+1.6)U$$

$$\Updownarrow \quad X_2(s) = \frac{8(s+1.6)}{s^2}U(s)$$

$$X_1(s) = \frac{12.8}{s^2}U(s)$$