Tentamen SSY043
Signaler och System, Z2

Lösningsförslag

20 mars 2025 kl. 14:00-18.00

1. (a) Insignal $x(t) = 5.0\cos(1000\,t)$ V. Överföringsfunktion och frekvenssvar är

$$G(s) = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{sRC}{1 + sRC} = \{s = j\omega\} =$$
$$= G(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

Amplitudpåverkan ($\omega = 1000$ rad/s)

$$|G(j\omega)| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} = \frac{1000 \cdot 5000 \cdot (1/6) \cdot 10^{-6}}{\sqrt{1 + (1000 \cdot 5000 \cdot (1/6) \cdot 10^{-6})^2}} =$$
$$= \cdots = 0.640$$

Fasvridning ($\omega = 1000$)

$$\arg\{G(j\omega)\} = \arg\{j\omega RC\} - \arg\{1 + j\omega RC\} = 90^\circ - \arctan\{\omega RC\} =$$
$$= 90^\circ - \arctan\{0.8333\} = 90^\circ - 39.8^\circ = 50.2^\circ$$

Utsignal i stationärtillstånd ($\omega = 1000$ rad/s)

$$y(t) = |G(j\omega)| \cdot 5.0\cos(\omega\,t + \arg\{G(j\omega)\}) =$$
$$= 3.2\cos(1000\,t + 50.2^\circ) \quad \text{V}$$

(b) Samplingsfrekvens $\omega_s = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.020} = 100\pi$ rad/s. Signalvinkelfrekvens hos $x_1(t)$ är $\omega_1 = 38\pi$ rad/s. $\omega_1 < \frac{\omega_s}{2}$ betyder ingen aliasing. Aliasing med lika |DFT| uppkommer om $\omega_2 = \omega_s - \omega_1 = (100 - 38)\pi = 62\pi$ rad/s. Vinkelrekvensen ω_2 "viks ner"(aliasing) enligt $\omega_s - \omega_2$ och ger samma |DFT| som x_1 med vinkelfrekvens ω_1. För signal $x_2(t)$ är $\omega_2 > \frac{\omega_s}{2}$ vilket betyder aliasing. En samplad reell sinusformad signal ger två 'toppar' vid DFT beräkningar, en i $|X[k]|$ och den andra i $|X[N-k]|$. Signalernas fas saknar betydelse då beloppet av DFT studeras.

$\boxed{\text{Svar: } \omega_2 = 62\,\pi \text{ rad/s.}}$

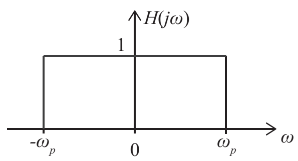
2.

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \cdot \sin(\frac{2\pi k}{T} t) \quad .$$

Grundvinkelfrekvens: $\quad \omega_o = \dfrac{2\pi}{T}$.

(a) Filter:

$$h(t) = \frac{\sin(\omega_p t)}{\pi t} \leftrightarrow H(j\omega) = u(\omega + \omega_p) - u(\omega - \omega_p) \quad \text{(Beta F53.)}$$



Figur 1: Idealt lågpassfilter, $\omega_p = \frac{16\pi}{3T}$

(b)

$$\frac{w_p}{\omega_o} = \frac{16\pi}{3T} \cdot \frac{T}{2\pi} = \frac{8}{3} \approx 2.7, \qquad \omega_p \approx 2.7\omega_o$$

Endast vinkelfrekvenserna ω_o och $2\,\omega_o$ $(k = 1, 2)$ passerar $H(j\omega)$.

$$y(t) = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \cdot \sin(k\,\omega_o\,t) \qquad \text{med } \omega_o = \frac{2\pi}{T}$$

(c) Allmän Fourierserie $x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k \cos(k\,\omega_o\,t) + B_k \sin(k\,\omega_o\,t))$ ger med Parsevals formel medeleffekten $\bar{P}_x = \left(\frac{A_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(A_k^2 + B_k^2)$.
I stationärtillstånd gäller för utsignalen $y(t)$ $(A_0 = 0$ och $A_k = 0$ för $k = 1, 2, 3, 4, \cdots)$. Vi får

$$\bar{P}_y = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}(B_k^2) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi}\right) = \frac{3}{4\pi}$$

3. Impulssvar

$$
\begin{aligned}
h[n] &= [1+(-1)^n]\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[n] = \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[n] + (-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[n] = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n] + \frac{1}{2}(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n] = \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right]u[n]
\end{aligned}
$$

z-transform ger överföringsfunktionen

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \frac{1}{2}\left[\frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{z}{z+\frac{1}{2}}\right] = \frac{z}{2}\left[\frac{z+\frac{1}{2}+z-\frac{1}{2}}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{2})}\right] = \\
&= \frac{z}{2}\left[\frac{2z}{z^2-\frac{1}{4}}\right] = \left(\frac{z^2}{z^2-\frac{1}{4}}\right) = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}\right)
\end{aligned}
$$

Och vidare

$$
\begin{aligned}
H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} &= \left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}\right) \\
Y(z)\left(1-\frac{1}{4}z^{-2}\right) &= X(z)
\end{aligned}
$$

Invers z-transform ger differensekvationen

$$
y[n] - \frac{1}{4}y[n-2] = x[n]
$$

4. Impulssvar

$$h(t) = (e^{-t} - k\, e^{-2t})u(t)$$

Laplacetransformera

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{s+1} - \frac{k}{s+2} = \frac{s+2-k(s+1)}{(s+1)(s+2)} = \\ &= \frac{s(1-k)+2-k}{(s+1)(s+2)} = \{\text{PBU}\} = \end{aligned}$$

Stegsvar $y(t) \leftrightarrow Y(s)$. Insignal $x(t) = u(t) \leftrightarrow X(s) = \frac{1}{s}$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s}H(s) = \frac{s(1-k)+2-k}{s(s+1)(s+2)} = \{\text{PBU}\} = \\ &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2} \end{aligned}$$

Invers Laplacetransform ger stegsvaret

$$y(t) = (A + Be^{-t} + Ce^{-2t})u(t)$$

Notera: $y(t) = A = 2$ då $t \to \infty$. Beräkna k då $A = 2$.

$$\begin{gathered} s(1-k)+2-k = A(s+1)(s+2) + Bs(s+2) + Cs(s+1) \\ \text{sätt } s = 0 \\ 2 - k = 2A = 4 \Rightarrow k = -2 \end{gathered}$$

Alternativ lösning

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^\infty h(t)dt = \int_0^\infty (e^{-t} - k\, e^{-2t})dt \\ &= \left[-e^{-t} + \frac{k}{2}\, e^{-2t}\right]_0^\infty = 0 + 0 - (-1 + \frac{k}{2}) = 2 \\ \frac{k}{2} &= -2 + 1 \Rightarrow k = -2 \end{aligned}$$

5. Insignal $x[n] = \cos(\Omega\, n)\,,\ \forall\ n$ med $\Omega = \dfrac{\pi}{6}$

Differensekvationen

$$y[n] = x[n] + x[n-1] + x[n-2]$$

z-transform

$$\begin{aligned} Y(z) &= X(z)(1 + z^{-1} + z^{-2}) \\ H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 + z^{-1} + z^{-2} \end{aligned}$$

Fekvenssvar, låt $z = e^{j\Omega}$

$$\begin{aligned} H(e^{j\Omega}) &= 1 + e^{-j\Omega} + e^{-2j\Omega} = e^{-j\Omega}(e^{j\Omega} + 1 + e^{-j\Omega}) = \\ &= e^{-j\Omega}\left(1 + 2\cdot\frac{e^{j\Omega} + e^{-j\Omega}}{2}\right) = e^{-j\Omega}(1 + 2\cos(\Omega)) \end{aligned}$$

Amplitudpåverkan

$$|H(e^{j\Omega})| = \{\Omega = \frac{\pi}{6}\} = 1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3}$$

Fasvridning

$$\begin{aligned} \arg\{H(e^{j\Omega})\} &= \{\Omega = \frac{\pi}{6}\} = \arg\{e^{-j\frac{\pi}{6}}\} + \arg\{(1 + 2\cos(\pi/6))\} = \\ &= -\frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Utsignal i stationärtillstånd

$$\begin{aligned} y[n] &= |H(e^{j\Omega})|\cos\left(\Omega n + \arg\{H(e^{j\Omega})\}\right) = \\ &= (1 + \sqrt{3})\cos\left(\frac{\pi}{6}\,n - \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$