Tentamen SSY043
Signaler och System, Z2

Lösningsförslag

14 mars 2024 kl. 14:00-18.00

1. (a)

$$
\begin{aligned}
x(t) &= Ae^{-2t}u(t) \\
x[n] &= x(nT) = Ae^{-2nT}u[n] = A(e^{-2T})^n u[n] \\
X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n]\, z^{-n} = A\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-2T})^n\, z^{-n} = A\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-2T}z^{-1})^n \\
&\qquad \text{Summa av geom. serie} \\
X(z) &= \frac{A}{1-e^{-2T}z^{-1}} = \frac{A\,z}{z-e^{-2T}} \qquad \text{med ROC: } |z| > e^{-2T}
\end{aligned}
$$

(b) Laplacetransformera in- och utsignal

$$
\begin{aligned}
x(t) &= e^{-t}u(t) & \Rightarrow && X(s) &= \frac{1}{s+1} \\
y(t) &= 2e^{-2\,t}u(t) & \Rightarrow && Y(s) &= \frac{2}{s+2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H(s) &= \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2(s+1)}{s+2} = 2\cdot\frac{s+2-1}{s+2} = 2\left(1-\frac{1}{s+2}\right) \\
h(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = 2\delta(t) - 2e^{-2\,t}\,u(t)
\end{aligned}
$$

2. (a) Laplacetransformera insignal och impulssvar ($\omega_o = 4\pi$).

$$x(t) = \cos(\omega_o t)u(t) \qquad \Rightarrow \qquad X(s) = \frac{s}{s^2+\omega_o^2}$$

$$h(t) = 10\, e^{-10t}u(t) \qquad \Rightarrow \qquad H(s) = \frac{10}{s+10}$$

$$\begin{aligned}
Y(s) &= H(s)X(s) = \frac{10}{s+10}\cdot\frac{s}{s^2+\omega_o^2} = \{\text{ PBU }\} = \\
&= \frac{A}{s+10} + \frac{Bs+C}{s^2+\omega_o^2} \\
10s &= A(s^2+\omega_o^2) + (Bs+C)(s+10) \\
10s &= As^2 + A\omega_o^2 + Bs^2 + s(10B+C) + 10C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[s^0]: &\quad 0 = A\omega_o^2 + 10C \\
[s^1]: &\quad 10 = 10B + C \\
[s^2]: &\quad 0 = A + B
\end{aligned}$$

Tre ekvationer och tre obekanta.
Lösningen blir $A = -B = -0.388$ och $C = 6.12$

$$\begin{aligned}
Y(s) &= A\frac{1}{s+10} + B\frac{s}{s^2+\omega_o^2} + \frac{C}{\omega_o}\cdot\frac{\omega_o}{s^2+\omega_o^2} \\
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \\
&= (-0.388e^{-10t} + 0.388\cos(4\pi\, t) + 0.487\sin(4\pi\, t))\, u(t)
\end{aligned}$$

(b) Systemets frekvenssvar $H(s)|_{s=j\omega} = H(j\omega)$. Amplitudpåverkan då $t \to \infty$ blir

$$|H(j\omega)|_{\omega=4\pi} = \frac{10}{\sqrt{(4\pi)^2+10^2}} = 0.623$$

Alltså blir efterfrågad amplitud: $1 \cdot 0.623 = 0.623$
Kan också beräknas från de två (sin , cos) amplituderna i $y(t)$: $\sqrt{0.388^2+0.487^2} = 0.623$

Alternativt svar/lösning:

$$y(t) = \left(-0.388e^{-10t} + |H(j4\pi)|\cos(4\pi\, t + \arg\{H\{j4\pi\}\}\right)\, u(t)$$

3. z-trasformera impulssvaret

$$\begin{aligned}
h[n] &= \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] u[n] \\
H(z) &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} = \\
&= \frac{1-\frac{1}{4}z^{-1}+1-\frac{1}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})} = \frac{2-\frac{3}{4}z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \\
Y(z)&\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}\right) = X(z)\left(2-\frac{3}{4}z^{-1}\right)
\end{aligned}$$

(a) Invers z-transform ger differensekvationen

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n] - \frac{3}{4}x[n-1]$$

(b)

$$x[n] = (-1)^n = \cos(\pi\, n)$$

Diskret insignal med $\Omega = \pi$. Systemets frekvensvar är

$$\begin{aligned}
H(z) &= \{z = e^{j\Omega}\} = \frac{2-\frac{3}{4}e^{-j\Omega}}{1-\frac{3}{4}e^{-j\Omega}+\frac{1}{8}e^{-j2\Omega}} \\
\Omega &= \pi \\
H(e^{j\pi}) &= \frac{2-\frac{3}{4}(-1)}{1-\frac{3}{4}(-1)+\frac{1}{8}\cdot 1} = \frac{\frac{11}{4}}{\frac{8+6+1}{8}} = \frac{22}{15}
\end{aligned}$$

$$y[n] = |H(e^{j\Omega})|\cos(\Omega\, n + \arg\{H(e^{j\Omega})\}) = \{\Omega = \pi\} = \frac{22}{15}\cos(\Omega\, n) = \frac{22}{15}(-1)^n$$

4. (a) $x(t) \to x(2t)$. Signalen 'komprimeras' med faktor 2 längs tidsaxeln. Signalförloppet går dubbelt så snabbt. Grundvinkelfrekvensen ökar från ω_o till $2\omega_o$.

$$x(2t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{jk2\omega_0 t}$$

Och c_k ändras ej.

(b)

$$x(t - t_o) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{jk\omega_0 (t - t_o)} =$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{c_k \, e^{-jk\omega_o t_o}} e^{jk\omega_0 t}$$

Ny Fourierseriekoefficient: $c_k \, e^{-jk\omega_o \, t_o}$

(c) Om insignal $x(t) = e^{j\omega t}$ blir utsignalen $y(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}$. Och för Fourierserien (superposition)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(jk\omega_o) \, c_k \, e^{jk\omega_0 t}$$

Medeleffekt enligt Parsevals formel (periodisk signal)

$$\bar{P}_x = \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \quad \text{(insignal)}$$
$$\bar{P}_y = \frac{1}{T} \int_T |y(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k \, H(jk\omega_o)|^2 \quad \text{(utsignal, Svar på (c))}$$

5. Samplingsintervall $T = 6.25$ ms. Samplingsfrekvens $f_s = \frac{1}{T} = 160$ Hz. DFT: $X[k]$, $k = 0, 1, 2, 3, \cdots N - 1$ och $N = 64$. Index k svarar mot frekvensen $f_k = \frac{k}{N} \cdot f_s$ Hz. En reell sinusformad signal ger en 'topp' i |DFT| vid k och $N - k$. Vilka k-värden motsvarar de angivna frekvenserna? Framräknat $\hat{k}$ jämförs med toppar i $|X[k]|$ i Figur 3 där k och $\hat{k}$ ligger nära varandra.

f [Hz]	$\hat{k} = \frac{f}{f_s} N$	$N - \hat{k}$	I Figur 3 ?
16	6.4	57.6	Ja ($k = 6$)
32	12.8	51.2	Ja ($k = 13$)
48	19.2	44.8	Nej
64	25.6	38.4	Ja ($k = 26$)
96	38.4	25.6	Ja ($k = 26$)
112	44.8	19.2	Nej
128	51.2	12.8	Ja ($k = 13$)
144	57.6	6.4	Ja ($k = 6$)

De frekvenser med ett angivet 'Ja' har ett $\hat{k}$ eller $N - \hat{k}$ värde som ligger nära ett k värde där vi har en tydlig 'topp' i $|X[k]|$. Dessa signaler kan vara representerade i Figur 3.