Tentamen SSY042/043
Signaler och System, Z2

Lösningsförslag

25 augusti 2023 kl. 14:00-18.00

1. a)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau \quad .$$

Är systemet linjärt? Test:

Insignal	Utsignal
$x_1(t)$	$y_1(t) = \int_{-\infty}^{t} x_1(\tau) d\tau$
$x_2(t)$	$y_2(t) = \int_{-\infty}^{t} x_2(\tau) d\tau$
$x(t) = a x_1(t) + b x_2(t)$	$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau =$ $= \int_{-\infty}^{t} (a x_1(\tau) + b x_2(\tau)) d\tau =$ $= a \int_{-\infty}^{t} x_1(\tau) d\tau + b \int_{-\infty}^{t} x_2(\tau) d\tau =$ $= a y_1(t) + b y_2(t)$

Ja. Systemet är linjärt!

b) $x(t) = A \sin(\omega t)$. Sampling ger $t = nT$ och $x[n] = A \sin(\omega\, nT)$ eller $x[n] = A \sin(n\, \omega\, T)$. Då är $\Omega = \omega T$.

Sampelintervallet $T = 200$ μs.

(i) $\Omega = \omega T = 1000\pi \cdot 200 \cdot 10^{-6} = 0.2\pi = \frac{\pi}{5} = \frac{2\pi}{10}$

(ii) En period $= 2\pi$. Sampel/period: $N = \frac{2\pi}{\Omega} = 10$.

2. $H(z) = \frac{2z}{z-a} = 2\frac{1}{1-az^{-1}}$. Impulssvar $h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = 2a^n u[n]$.

   (a) Faltning

$$
\begin{aligned}
y[n] &= \sum_{k=0}^{n} h[k]x[n-k] = \{x[n] = u[n-1]\} = \sum_{k=0}^{n} h[k]u[n-1-k] \\
y[0] &= h[0]u[-1] = 0 \\
y[1] &= h[0]u[0] + h[1]u[-1] = 2a^0 = 2 \\
y[2] &= h[0]u[1] + h[1]u[0] + h[2]u[-1] = 2 + 2a
\end{aligned}
$$

   $y[2] = 2 + 2a = 3.2$ ger $2a = 1.2$ och $a = 0.6$.
   (Pol innanför EC, Stabilt!))

   (b)

$$
\begin{aligned}
x[n] &= u[n-1] \text{ och } X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \frac{z}{z-1} \cdot z^{-1} = \frac{1}{z-1} \\
Y(z) &= H(z)X(z) = z \cdot \frac{2}{(z-1)(z-a)} = \\
&= \{\text{PBU}\} = z\left[\frac{B}{z-1} + \frac{C}{z-a}\right] \\
2 &= B(z-a) + C(z-1) \\
z &= 1 \Rightarrow 2 = B(1-0.6) \text{ och } B = 5 \\
z &= a \Rightarrow 2 = C(0.6-1) \text{ och } C = -5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y(z) &= 5\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0.6}\right) \\
y[n] &= \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = 5(1-0.6^n)u[n] \\
&\quad \text{Kontroll} \\
y[2] &= 5(1-0.6^2) = 3.2 \quad \text{Ok!}
\end{aligned}
$$

(Alternativa lösningsvägar finns.)

3. Kausalt system ty $h(t) = 0$ för $t < 0$.

   Laplacetransformera.

$$\begin{aligned} h(t) &= (8 - 5\,e^{-4t})u(t) \\ H(s) &= \mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{8}{s} - \frac{5}{s+4} = \frac{8(s+4) - 5s}{s(s+4)} = \frac{3s+32}{s(s+4)} \end{aligned}$$

   Beräkna utsignalen $y(t)$ då insignalen är *(5p)*

$$x(t) = e^{-8t}u(t), \quad X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{1}{s+8}$$

   Utsignalens transform

$$\begin{aligned} Y(s) = H(s)X(s) &= \frac{3s+32}{s(s+4)(s+8)} = \{\text{PBU}\} = \\ &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4} + \frac{C}{s+8} \end{aligned}$$

$$3s + 32 = A(s+4)(s+8) + Bs(s+8) + Cs(s+4)$$

$$\begin{aligned} s = 0 &\Rightarrow 32 = A \cdot 4 \cdot 8 \Rightarrow A = 1 \\ s = -4 &\Rightarrow -12 + 32 = B(-4) \cdot 4 \Rightarrow B = -\frac{5}{4} \\ s = -8 &\Rightarrow -24 + 32 = C(-8)(-4) \Rightarrow C = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s} - \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{s+4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s+8} \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \left(1 - \frac{5}{4}\,e^{-4t} + \frac{1}{4}\,e^{-8t}\right) u(t) \end{aligned}$$

4. (a) Periodtid T ger grundvinkelfrekvens $\omega_o = \frac{2\pi}{T}$.

Jämför Fig. 1 i tesen med figur i Beta, *Special Fourier Series* [1]. Vi ser att top-till-top värdet $h = 2$, $\alpha = 1$, period $T = 2L$ samt att vårt medelvärdet är noll (konstanta termen framför summan). $\alpha = 1$ ger alla $\sin(n\pi\alpha) = 0$ och $1 - \cos(n\pi\alpha) = 2$ för udda n och lika med noll för jämna n.

Teckna Fourierserien för insignalen

$$x(t) = -\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos\left(\frac{n2\pi}{T}\, t\right) = -\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(n\,\omega_o\, t) \ .$$

Teckna $H(j\omega)$ då $\omega_o = \frac{2\pi}{T}$. Gör beräkningar för $\omega = \omega_o$, $3\,\omega_o$ och $5\,\omega_o$.

$$H(j\omega) = \frac{j\,\frac{\omega}{\omega_o}}{(j\,\frac{\omega}{\omega_o})^2 + j\,\frac{\omega}{\omega_o} + 1}$$

$\boxed{n=1}$ $H(j\omega_o) = \frac{j}{-1+j+1} = 1$, $|H(j\omega_o)| = 1$, $\arg\{H(j\omega_o\} = \varphi_1 = 0$

$\boxed{n=3}$ $H(j3\,\omega_o) = \frac{j3}{-9+j3+1} = \frac{j3}{-8+j3}$
$|H(j3\,\omega_o)| = \frac{3}{\sqrt{64+9}} = \frac{3}{\sqrt{73}}$
$\arg\{H(j3\,\omega_o\} = \varphi_3 = 90^\circ - 159.4^\circ = -69.4^\circ$

$\boxed{n=5}$ $H(j5\,\omega_o) = \frac{j5}{-25+j5+1} = \frac{j5}{-24+j5}$
$|H(j5\,\omega_o)| = \frac{5}{\sqrt{576+25}} = \frac{5}{\sqrt{601}}$
$\arg\{H(j5\,\omega_o\} = \varphi_5 = 90^\circ - 168.2^\circ = -78.2^\circ$

Beräkna amplitud och fasförändring vid aktuella frekvenser.

$$A_n = -\frac{8}{\pi^2\,n^2}|H(jn\,\omega_o)|, \quad \varphi_n = \arg\{H(jn\,\omega_o)\}$$

n	A_n	φ_n
1	$-\frac{8}{\pi^2}$	0°
3	$-\frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{\sqrt{73}}$	-69.4°
5	$-\frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{1}{25} \cdot \frac{5}{\sqrt{601}}$	-78.2°

[1] i Beta version 6:1, se kap 13.1.3 och signal (3)

5.
- Notera. $N = 4$ för alla $x_i[n]$. Då måste även $X[k]$ ha $N = 4$. Uteslut X_h och X_e med $N = 5$.
- Testa med att beräkna $X[0] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]$.

x_1 : $\sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] = 1 \Rightarrow X[0] = 1$ ger c, d, g Ok.
Även $X[1] = X[2] = X[3] = 1 + 0 + 0 + 0 = 1$.
Alltså $x_1[n] \leftrightarrow X_d[k]$.
('Impuls' ger bidrag vid 'alla' frekvenser)

x_2 : $\sum_{n=0}^{N-1} x_2[n] = X[0] = 0$. Stämmer med $x_2[n] \leftrightarrow X_a[k]$.
(Signalens medelvärde ($X[0]$) är noll.)

x_3 : $\sum_{n=0}^{N-1} x_3[n] = X[0] = 2$. Stämmer med $x_3[n] \leftrightarrow X_f[k]$.

x_4 : $\sum_{n=0}^{N-1} x_4[n] = X[0] = 1$ c, g möjliga.
OBS! $x_4[n]$ en konstants signal. $X[k] \neq 0$ endast för $k = 0$.
Alltså $x_4[n] \leftrightarrow X_c[k]$.

x_5 : $\sum_{n=0}^{N-1} x_5[n] = X[0] = 1$. Stämmer med c, d, g men endast g kvar.
Notera: $x_5[n]$ en fördröjd impuls ($x_1[n]$).
Då borde $|DFT\{x_1[n]\}| = |DFT\{x_5[n]\}|$ vilket stämmer på $X_d[k]$ och $X_g[k]$.
Alltså $x_5[n] \leftrightarrow X_g[k]$.

Svar

Signal	DFT
$x_1[n]$	$X_d[k]$
$x_2[n]$	$X_a[k]$
$x_3[n]$	$X_f[k]$
$x_4[n]$	$X_c[k]$
$x_5[n]$	$X_g[k]$