Tentamen SSY043
Signaler och System, Z2

Lösningsförslag

8 juni 2023 kl. 08:30-12.30

1. a) Ett diskret system. Linjärt ?

$$y[n] = 2\,x[n]\,u[n] = x[n] \cdot 2u[n]$$

Test:

$x[n] \rightarrow \boxed{\text{system}} \rightarrow x[n] \cdot 2u[n] \rightarrow \boxed{\text{Delay } n_o} \rightarrow y_1[n]$

$x[n] \rightarrow \boxed{\text{Delay } n_o} \rightarrow x[n-n_o] \rightarrow \boxed{\text{system}} \rightarrow y_2[n]$

Här är $y_1[n] = x[n-n_o] \cdot 2u[n-n_o]$ och $y_2[n] = x[n-n_o] \cdot 2u[n]$
$y_1[n] \neq y_2[n]$. Systemet EJ tidsinvariant.

b) Laplactransformera impulssvar och insignal

$$\begin{aligned}
h(t) &= e^{-3t}u(t) \longleftrightarrow H(s) = \frac{1}{s+3} \\
x(t) &= e^{-t}u(t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{1}{s+1} \\
Y(s) &= X(s)H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)} = \{\text{PBU}\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3}\right) \\
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t})u(t)
\end{aligned}$$

Sök max för $y(t)$ (Konstanten $\frac{1}{2}$ bortser vi ifrån, saknar betydelse för max)

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{y}}{dt} &= -e^{-t} + 3\,e^{-3t} = 0 \\
3\,e^{-3t} &= e^{-t} & 3\,e^{-3t}e^{t} &= e^{-t}e^{t} \\
3\,e^{-2t} &= 1 & e^{-2t} &= 1/3 \\
e^{2t} &= 3 & 2\,t &= \ln(3)
\end{aligned}$$

Svar: $t = \frac{\ln(3)}{2}$

2. z-transformera stegsvaret:

$$y_s[n] = [2 - (0.5)^n]u[n] \leftrightarrow H(z) = \frac{2\,z}{z-1} - \frac{z}{z-0.5}$$
$$H(z) = z\left(\frac{2(z-0.5)-(z-1)}{(z-1)(z-0.5)}\right) = z\left(\frac{2z-1-z+1)}{(z-1)(z-0.5)}\right) =$$
$$= \frac{z}{z-1}\cdot\frac{z}{z-0.5} = \frac{z}{z-1}\cdot H(z) \quad \text{stegsvarets transform}$$

Alltså är överföringsfunktionen $H(z) = \frac{z}{z-0.5}$.
z-transform av insignalen samt beräkning av utsignal

$$x[n] = 8\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n] \leftrightarrow X(z) = \frac{8\,z}{z+0.25}$$
$$Y(z) = X(z)H(z) = z\left(\frac{8z}{(z+0.25)(z-0.5)}\right)$$

Partialbråksuppdelning (spara undan ett z ifrån täljaren)

$$\frac{8z}{(z+0.25)(z-0.5)} = \frac{A}{z+0.25} + \frac{B}{z-0.5}$$
$$8\,z = A(z-0.5) + B(z+0.25)$$
$$z = 0.5 \Rightarrow 4 = B\frac{3}{4} \Rightarrow B = \frac{16}{3}$$
$$z = -0.25 \Rightarrow -2 = A(-\frac{3}{4}) \Rightarrow A = \frac{8}{3}$$

Vi får

$$Y(z) = \frac{8}{3}\cdot\frac{z}{z+\frac{1}{4}} + \frac{16}{3}\cdot\frac{z}{z-\frac{1}{2}}$$

Invers z-transform ger

$$y[n] = \frac{8}{3}\left[\left(-\frac{1}{4}\right)^n + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u[n]$$

3. Överföringsfunktion ($p_1 = -4 + j3$ och $p_2 = -4 - j3$)

$$
\begin{aligned}
H(s) &= \frac{10}{(s-p_1)(s-p_2)} = \frac{10}{(s+4-3j)(s+4+3j)} = \\
&= \frac{10}{(s+4)^2+9} = \frac{10}{s^2+8s+25}
\end{aligned}
$$

Laplacetransformera insignalen

$$x(t) = 2\,e^{-3\,t}u(t) \leftrightarrow X(s) = \frac{2}{s+3}$$

Utsignalens transform

$$
\begin{aligned}
Y(s) = H(s)X(s) &= \frac{20}{(s^2+8s+25)(s+3)} = \{\text{PBU}\} = \\
&= \frac{A}{s+3} + \frac{Bs+C}{s^2+8s+25}
\end{aligned}
$$

$$20 = A(s^2+8s+25) + (Bs+C)(s+3)$$

Vi får ett ekvationssystem

$$
\begin{aligned}
s^0 &: \quad 20 = 25A + 3C \\
s^1 &: \quad 0 = 8A + 3B + C \\
s^2 &: \quad 0 = A + B
\end{aligned}
$$

Lösningen blir $A = 2$, $B = -2$ och $C = -10$.

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{2}{s+3} - \frac{2s+10}{s^2+8s+25} = \frac{2}{s+3} - \frac{2s+10}{(s+4)^2+9} = \\
&= \frac{2}{s+3} - \frac{2(s+4)+10-8}{(s+4)^2+9} = \\
&= \frac{2}{s+3} - 2\frac{s+4}{(s+4)^2+3^2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{(s+4)^2+3^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} &= \left(2e^{-3t} - 2e^{-4t}\cos(3\,t) - \frac{1}{3}\cdot 2e^{-4t}\sin(3\,t)\right)u(t) \\
&= 2\left(e^{-3t} - e^{-4t}\left(\cos(3\,t) + \frac{1}{3}\,\sin(3\,t)\right)\right)u(t)
\end{aligned}
$$

4. (a) Beräkna den dominerande frekvensen utifrån den inzoomade DFT figuren.
'Topp' vid $k = 20$, $N = 1024$ och $f_s = \frac{1}{T}$ ger

$$f = \frac{k}{N} \cdot f_s = \frac{k}{N} \cdot \frac{1}{T} = \frac{20}{1024} \cdot \frac{10^6}{610} = 32.0 \ \text{ Hz}$$

Fyra pulser per varv ger axeln rotationsfrekvens $f_a = \frac{f}{4} = 8$ Hz.
Åtta varv per sekund ger varvtal $n = f_a \cdot 60 = 8 \cdot 60 = 480$ rpm.

(b) Studera frekvenssvaret $H(z)_{|z=e^{j\Omega}}$. Frekvenssvaret måste bli noll vid ett visst värde på Ω. Ett diskret systems frekvensaxel ligger på enhetscirkeln. För ett visst z-värde på enhetscirkeln $z = e^{j\Omega}$ ska täljaren bli noll. Täljaren är av andra graden och vi tecknar den som

$$T = (z - z_1)(z - z_2) = (z - e^{j\Omega_1})(z - e^{-j\Omega_1})$$

ty z_1 och z_2 måste bilda ett konjugatpar (krav för reella koefficienter i $H(z)$). Sök aktuell diskret frekvens $\Omega = \omega T$ där $T = \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{2\pi}{6\,\omega}$. Då blir $\Omega = \omega \frac{2\pi}{6\,\omega} = \frac{\pi}{3}$. Täljaren tecknas som

$$\begin{aligned} T &= (z - e^{j\pi/3})(z - e^{-j\pi/3}) = z^2 - z\, e^{j\pi/3} - z\, e^{-j\pi/3} + e^0 = \\ &= z^2 - z\, 2(\frac{e^{j\pi/3} + e^{-j\pi/3}}{2}) + 1 = \\ &= z^2 - z\, 2\, \cos(\pi/3) + 1 = z^2 - z + 1 \end{aligned}$$

Det betyde att $b = 1$. Det ger två nollställen på enhetscirkeln, vid $z = e^{\pm j\pi/3}$.

(Jämför med det kontinuerliga notchfiltret i laborationsuppgiften)

5. Trigonometrisk Fourierserie

$$x(t) = A_o + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\,\omega_o t) + B_k \sin(k\,\omega_o t)$$

$x(t)$ fyrkantsvåg enligt figur. Medelvärde =0 $\Rightarrow A_o = 0$.

Signalen udda $\Rightarrow A_k = 0$ för $k = 1, 2, 3, \cdots$.

Enligt beräkning i hemlab: $B_k = \frac{4}{k\pi}$ för $k = 1, 3, 5, 7, 9, \cdots$ och är oberoende av fundamental period T och grundvinkelfrekvens $\omega_o = \frac{2\pi}{T}$.

Beta: Total medeleffekt från Parsevals formel med $A_o = 0$

$$P_x = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(A_k^2 + B_k^2) \quad \text{men vi har} \quad A_k = 0 \quad .$$

Total medeleffekt för insignal $P_x = \frac{1}{T}\int_0^T 1^2\,dt = \frac{1}{T}[\ t\ ]_0^T = 1$.

Grundvinkelfrekvens $\omega_o = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi\cdot 10^{-2}} = 100$ rad/s. $H(j\omega)$ släpper igenom alla vinkelfrekvenser $|\omega| < 420$ rad/s med oförändrad amlitud. För signalen $x(t)$ blir det $\omega_o = 100$ och $3\omega_o = 300$ rad/s. Alltså $k = 1$ och 3.

Utsignalens medeleffekt

$$P_y = \frac{1}{2}\left(B_1^2 + B_3^2\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2\right) = 0.90$$

Utsignalens effekt är $\frac{P_y}{P_x} \cdot 100\% = 90\%$ av insignalens effekt.

. . . .

Om man inte kommer ihåg Fourierserien från hemlabben kan man

(i) Lösa integralerna som ger A_k och B_k.

(ii) Studera Speciella Fourierserier i Beta. Där finns en generell fyrkantsvåg. Sätt $\alpha = 1$, $h = 1$ och $T = 2L$ så bildar det aktuell Fourierserie till signal $x(t)$.